第 6 講　　(平成 19 年 5 月 15 日)

(基本的例題)

今回から二回に渡って、幾つかの基本的例題を通じて運動方程式の解法の具体的な方法を示す。一般に、運動方程式の解法は次の４つのステップからなる。

(1) 物体に働く力を全て探し出す。

(2) 運動方程式をたてる。

(3) 一般解を求める。

(4) 初期条件から題意に即した解を得る。

1. 放物運動

水平方向に x-軸、y-軸、垂直方向に z-軸をとり、それぞれの方向への単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ とする。x-z 平面内で仰角 θ の方向に大きさ v_0 の速度で打ち上げた玉 (質量 m とする) の水平面での到達距離を求める。座標系 $\mathcal{K}(O;\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z)$ は絶対静止座標系で慣性系であると仮定する。すなわち、地球の自転等の効果は無視する。

(1) 玉に働く力は、$\boldsymbol{W} = -mg\boldsymbol{e}_z$　　(重力)

(2) 運動方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -mg\boldsymbol{e}_z \tag{4.1}$$

そこで、$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ として、各成分で書くと

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad , \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad , \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -g \tag{4.2}$$

(3) x, y 方向は等速運動、z 方向は自由落下運動である。積分は簡単に出来て

$$\begin{aligned} &v_x = v_{x0} \quad , \qquad v_y = v_{y0} \quad , \qquad v_z = -gt + v_{z0} \quad , \\ &x = v_{x0}t + x_0 \quad , \qquad y = v_{y0}t + y_0 \quad , \qquad z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t + z_0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

と一般解が求まる。ここに、$v_{x0}, \cdots, z_0$ 等は積分定数である。

(4) 初期条件として、$t = 0$ で $x = y = z = 0$, $v_x = v_0\cos\theta$, $v_y = 0$, $v_z = v_0\sin\theta$ をとると、積分定数が決まり

$$\begin{aligned} &v_x = v_0\cos\theta \quad , \qquad v_y = 0 \quad , \qquad v_z = -gt + v_0\sin\theta \quad , \\ &x = (v_0\cos\theta)t \quad , \qquad y = 0 \quad , \qquad z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\theta)t \end{aligned} \tag{4.4}$$

と解が求まる。これを、$\boldsymbol{v} = -gt\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{r} = -(1/2)gt^2\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{v}_0 t$ とベクトルにまとめて書くと便利である。ここに $\boldsymbol{v}_0 = (v_0\cos\theta)\boldsymbol{e}_x + (v_0\sin\theta)\boldsymbol{e}_z$ である。

運動の軌跡は、t を x の函数として表わし、それを z の式に入れることにより

$$z = -\frac{1}{2}\frac{g}{(v_0\cos\theta)^2}x^2 + x\tan\theta \tag{4.5}$$

これは放物線である。最高点に達するまでの時間は $v_z = 0$ とすることにより、$t = (v_0\sin\theta)/g$. これを、x と z の式に代入することにより、最高点の座標が求まる。また、着地点までの距離は、$z = 0$ を t について解くことにより、着地点までの時間が

$$t_0 = 2\frac{v_0\sin\theta}{g} \tag{4.6}$$

と求まるので、これを x の式に代入して

$$x_0 = (v_0\cos\theta)t_0 = \frac{{v_0}^2}{g}(\sin\, 2\theta) \tag{4.7}$$

と求まる。Eq. (4.6) の t_0 は最高点に達するまでの時間の丁度 2 倍である。特に、v_0= 一定、の条件のもとに一番遠くまで玉を飛ばすことの出来る角度は、$\sin 2\theta = 1$, つまり $\theta = \pi/4 = 45^\circ$ の角度で投げ上げた場合である。

(大気の抵抗を考慮した場合)

この時、最大の到達距離を得るためには、θ を 45° より大きくすればよいか、あるいは小くすればよいかという問題を考えてみる。経験によれば、一般に大気の抵抗力は速度に比例してその向きに逆の方向をもつ。これを、$\boldsymbol{F} = -\gamma m\boldsymbol{v}$ ($\gamma > 0$ は定数) とすると、Eq. (4.1) の運動方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -mg\boldsymbol{e}_z - \gamma m\boldsymbol{v} \tag{4.8}$$

と変更をうける。加速度を $\boldsymbol{v}$ で書くと

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -g\boldsymbol{e}_z - \gamma\boldsymbol{v} \tag{4.9}$$

そこで、$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{e}_x + v_y\boldsymbol{e}_y + v_z\boldsymbol{e}_z$ として

$$\frac{dv_x}{dt} = -\gamma v_x \quad , \qquad \frac{dv_y}{dt} = -\gamma v_y \quad , \qquad \frac{dv_z}{dt} = -g - \gamma v_z \tag{4.10}$$

という 3 つの独立した微分方程式が得られる。まず x 方向の成分の解は $(1/v_x)(dv_x/dt) = -\gamma$ として t で積分することにより、C を積分定数として、 $\log v_x = -\gamma + C$ である。そこで e^C を新しく A とおくと $v_x = Ae^{-\gamma t}$ と求まる。同様に、z 方向の積分は $(dv_z/dt) = -\gamma(g/\gamma + v_z)$ を $(1/(g/\gamma + v_z))(dv_z/dt) = -\gamma$ と書いて t で積分すること

により $v_z = A'e^{\gamma t} - g/\gamma$ である。ここに A' は新しい積分定数である。結局、速度の一般解は

$$v_x = A_x e^{-\gamma t} \quad , \qquad v_y = A_y e^{-\gamma t} \quad , \qquad v_z = A_z e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \tag{4.11}$$

ここに、積分定数 A_x, A_y, A_z は $t=0$ で $v_x = A_x = v_0 \cos\theta, \cdots, v_z = A_z - g/\gamma = v_0 \sin\theta$ であることにより、$A_x = v_0 \cos\theta,\ A_y = 0,\ A_z = g/\gamma + v_0 \sin\theta$ と求まる。結局、速度の解は

$$v_x = e^{-\gamma t}(v_0 \cos\theta) \quad , \qquad v_y = 0 \quad , \qquad v_z = \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \sin\theta\right) e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \tag{4.12}$$

これを、t でもう 1 度積分して

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma t}(v_0 \cos\theta) + C_x \ , \\ y &= C_y \\ z &= -\left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \sin\theta\right) \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} t + C_z \end{aligned} \tag{4.13}$$

ここに、新しい積分定数 C_x, C_y, C_z は $t=0$ で $x=y=z=0$ であることから決まる。結局、最終的な解として

$$\begin{aligned} x &= (v_0 \cos\theta) \frac{1}{\gamma} \left(1 - e^{-\gamma t}\right) \ , \\ y &= 0 \\ z &= \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \sin\theta\right) \frac{1}{\gamma} \left(1 - e^{-\gamma t}\right) - \frac{g}{\gamma} t \end{aligned} \tag{4.14}$$

が求まる。

運動の軌跡の式は、x の式から t を x で表して、これを z の式に代入すれば求められるが、今の場合、あまり簡単な式にはならない。それよりも重要なのは、$\gamma \to 0$ の極限で、以前の空気抵抗の無い場合の式になるか、ということである。これを見るために、指数函数 e^z の Taylor 展開

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!} z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \cdots \tag{4.15}$$

を利用する。これを用いると $e^{\gamma t} = 1 - \gamma t + (1/2)\gamma^2 t^2 - \cdots$ より、

$$\frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{\gamma t}\right) = t - \frac{1}{2}\gamma t^2 + \cdots \tag{4.16}$$

となるので、これを Eq. (4.14) に代入すると

$$\begin{aligned} x &= (v_0 \cos\theta) t \left(1 - \frac{1}{2}\gamma t + \cdots\right) \ , \\ y &= 0 \\ z &= \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \sin\theta\right)\left(t - \frac{1}{2}\gamma t^2 + \cdots\right) - \frac{g}{\gamma} t \\ &= -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\theta) t + O(\gamma) \end{aligned} \tag{4.17}$$

となり、$\gamma \to 0$ の時 Eq. (4.4) に帰着する。Eq. (4.17) で、$O(\gamma)$ は γ の 1 次の order の微少量であることを示す。また、$t \to \infty$ の極限で Eq. (4.12) は

$$\begin{aligned} v_x &\to 0 \ , \\ v_z &\to -\frac{g}{\gamma} \end{aligned} \tag{4.18}$$

となる。ここで、最後の $-g/\gamma$ は、もとの式 Eq. (4.10) で $dv_z/dt = a_z \to 0$ となった時の極限の速度に対応しており、これを空気抵抗のある時の" 終端速度" と呼んでいる。また、$t \to \infty$ の時 Eq. (4.14) から

$$\begin{aligned} x &\to \frac{v_0 \cos\theta}{g} \ , \\ z &\to -\frac{g}{\gamma} t \end{aligned} \tag{4.19}$$

であることにより、$x = (v_0 \cos\theta)/g$ は x-z 平面上での軌跡の漸近線であることがわかる。

今度は、反対の極限として γ が十分大きい時を考える。Eq. (4.10) からすぐ分かるように、γ は [1/s] の次元をもっているので、いま考えている問題に特徴的な時間 t_0 を考えて、$\gamma t_0 \gg 1$ の場合を考えることになる。t_0 として、ここでは玉が再び地表に達するまでの時間、すなわち x-y 平面 ($z = 0$ 平面) への到達時間を考えることにする。この時、Eq. (4.14) で $e^{-\gamma t_0}$ を無視すると

$$\begin{aligned} x_0 &\sim \frac{v_0 \cos\theta}{\gamma} \ , \\ \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \sin\theta\right)\frac{1}{\gamma} &\sim \frac{g}{\gamma} t_0 \end{aligned} \tag{4.20}$$

となる。ここに、x_0 は x-y 平面での到達距離である。下の式より

$$t_0 \sim \frac{1}{\gamma}\left(1 + \gamma\frac{v_0}{g}\sin\theta\right) \tag{4.21}$$

が得られるので、これを

$$\gamma t_0 \sim 1 + \gamma\frac{v_0}{g}\sin\theta \gg 1 \tag{4.22}$$

と書くと、今考えている条件 $\gamma t_0 \gg 1$ より、Eq. (4.22) の右辺の 1 はその後の $\gamma(v_0/g)\sin\theta$ に比べて無視できることがわかる。そこで $t_0 \sim (v_0/g)\sin\theta$. これは、大気の抵抗が無い場合の式 Eq. (4.6) と同じ order の時間である。Eq. (4.20) の上の式からは、到達距離 x_0 は θ が小さい方が有利であることがわかる。しかし、$1/\gamma \ll t_0$ を用いると、x_0 は

$$x_0 \ll (v_0 \cos\theta) t_0 = \frac{{v_0}^2}{g}\sin\theta\cos\theta = \frac{{v_0}^2}{2g}(\sin 2\theta) \tag{4.23}$$

より、抵抗がない場合よりも常に小さいことがわかる。実際は、γ はかなり大きい。仮に、$v_0 = 120$ km/s とすると、$v_0 = 120\times10^3/(60\times60)$ m/s ~ 30 m/s だから、${v_0}^2/g \sim (30 \text{ m/s})^2/(9.8 \text{ m/s}^2) \sim 100$ m. そこで、$t_0 \sim (v_0/g)\sin\theta \sim (30 \text{ m/s})/(9.8 \text{ m/s}^2) \sim 3$ s. ここに、$\sin\theta \sim 1$ とした。そこで、もし $\gamma \gg 1/t_0$ なら、$\gamma \gg 0.3$ /s となる。x_0 は $\theta = 0$ の時最大だが、$\gamma t_0 \gg 1$ を満すためにはある程度の角度は必要である。以上より、大気の抵抗がある場合に一定の初速度のもとに最大の到達距離を得るためには、θ を 45° よりは小くとる方がよいことが予想される。