第 7 講　　(平成 19 年 5 月 22 日)

(基本的例題–続き–)

2. 斜面上の運動

斜面に沿って下方向に x-軸、斜面に垂直方向に y-軸をとる。斜面の傾きを θ とする。摩擦のない場合は、斜面に垂直な方向の力は釣合う。つまり $N_y = mg\cos\theta$. 斜面に平行な力は $F = mg\sin\theta$. そこで運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\theta \tag{5.1}$$

つまり、x-軸方向に加速度 $\alpha = g\sin\theta$ の定加速運動をする: $x = (1/2)\alpha t^2 + v_0 t + x_0$. ここに、$v_0$, x_0 はそれぞれ $t = 0$ における速度と位置である。

(摩擦のある場合)

$$N_x = mg\sin\theta \quad , \qquad N_y = mg\cos\theta \tag{5.2}$$

と力が釣合っており、初め静止しておれば静止を続ける。斜面の傾き θ を徐々に大きくしていった時、$\theta = \theta_{\max}$ で動き出すとすると、$(N_x)_{\max} = mg\sin\theta_{\max}$.

一般に接線方向の抗力 (摩擦力) N_x は垂直抗力 N_y に比例する。上の場合は $N_x = (\tan\theta)N_y$ である。$\theta = \theta_{\max}$ の時の $\mu = \tan\theta_{\max}$ を最大摩擦係数という。

$\theta > \theta_{\max}$ とすると、物体は滑り始める。この時の摩擦力 (滑り摩擦力) も垂直抗力 N_y に比例する。$N_x = \mu' N_y$ (一般に $\mu' < \mu$) $N_x = \mu' N_y = \mu' mg\cos\theta$ より x-軸方向の力は $F_x = mg\sin\theta - N_y = mg(\sin\theta - \mu'\cos\theta) > 0$. そこで、運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg(\sin\theta - \mu'\cos\theta) \tag{5.3}$$

つまり、x-軸方向に加速度 $\alpha = g(\sin\theta - \mu'\cos\theta)$ (> 0) の定加速運動をする。最大静止摩擦係数や滑り摩擦係数 (動摩擦係数ともいう) は物体の質量によらず、斜面と物体が触れあう面の性質だけで決まる。

3. 等速円運動

伸び縮みしない糸で結ばれた、平面上の半径 r の円運動を考える。2 次元極座標で考えるのが便利である。極座標での加速度の公式、$a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2$, $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$ を用いて、運動方程式は

$$ma_r = -T \quad , \qquad ma_\theta = 0 \tag{5.4}$$

である。ここに、T は糸の張力である。$r =$一定、より $\dot{r} = 0, \ddot{r} = 0$ から 角速度 $\omega = \dot{\theta}$ を使うと

$$mr\omega^2 = T \quad , \qquad r\dot{\omega} = 0 \tag{5.5}$$

二番目の式から $\omega=$ 一定、従って $v=r\omega=$ 一定。また、$T=mr\omega^2=m(v^2/r)$. つまり、糸の張力 T は速度 v の 2 乗に比例する。

(宿題) 静止衛星

地球赤道上を地球の自転と同じ周期でまわる人工衛星。高度 h をいくらにすればよいか? (答: 約 3 万 6 千 km)

4. 単振動

壁に取り付けたバネによる物体の振動。働く力は横方向に $F=-kx$ ($k>0$: バネ定数) これは、力が位置だけの函数の例である。運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \tag{5.6}$$

$\omega=\sqrt{k/m}$ とおくと

$$\ddot{x}+\omega^2x=0 \tag{5.7}$$

一般解は A, B を時間に依存しない定数として $x=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ と表される。ω は角速度と同じ単位をもち、実際、下に見る様に等速円運動の角速度と同じ意味を与えることが出来る。Eq. (5.6) は線型 2 階微分方程式の簡単な例となっている。特に、$A\to A\sin\delta$, $B\to A\cos\delta$ とすると、三角函数の加法定理より、$x=A\sin(\omega t+\delta)$。ここに A を振動の振幅、δ を初期位相 ($t=0$ の時の位相) という。三角函数の位相 $\omega t+\delta$ が 2π だけ増えれば、変位 x はもとの値にもどる。その意味で $\omega T=2\pi$ となる時間 T を周期と呼べば

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi A}{v} \tag{5.8}$$

($v=A\omega$) で ω は等速円運動の角速度としての意味を持つ。すなわち、単振動は円運動をある軸のまわりに射影したものである。

ここから、数学

(Euler の公式) $\quad e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

実際 $f(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ として、θ で微分すると

$$\frac{d}{d\theta}f(\theta)=if(\theta) \tag{5.9}$$

この微分方程式は、以前の空気の抵抗がある時の放物運動のところで試みたのと同様にして解ける。$\theta=0$ で $f(0)=1$ であることに注意すると、$f(\theta)=e^{i\theta}$.

(複素数の極座標表示)

横軸に x, 縦軸に y の代りに iy をとると $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ より

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \tag{5.10}$$

と書ける。従って、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ の 2 次元ベクトルは、唯一の複素数 $z = re^{i\theta}$ で表される。これを「複素数の極座標表示」という。

(Eq. (5.7) の一般解)

$A = 1$, $B = i$ として $x = e^{i\omega t}$. $A = 1$, $B = -i$ として (或は、左の複素共役をとって)、$x = e^{-i\omega t}$. 従って、Eq. (5.7) の一般解は $x = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$ とも表わされる。

(複素数の指数函数)　　通常の指数法則が成り立つ。つまり

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \\ \log z &= \log(re^{i\theta}) = \log r + \log e^{i\theta} = \log r + i(\theta + 2\pi n) \end{aligned} \tag{5.11}$$

ここに $n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \cdots$.

(Taylor 展開)

一般に函数 $f(x)$ が

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{5.12}$$

と巾 (ベキ) 級数に展開できるとすると

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \tag{5.13}$$

が成り立つ。ここに、$f^{(n)}(x)$ は $f(x)$ の n 階の微分を表す。これを、Taylor 展開という。実は、x を $z \in \boldsymbol{C}$ (複素数) としても成り立つ。すなわち

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\ z^n \tag{5.14}$$

複素函数 $f(z)$ がこの様に巾級数に展開出来るとき、$f(z)$ を解析函数という。指数函数 e^z や sine, cosine 函数、$\sin z$, $\cos z$ 等の、いわゆる初等函数は全て解析函数である。特に、$f(z) = e^z$ の時、$f^{(n)}(z) = e^z$ であるから

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + \frac{1}{1!} z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \cdots \tag{5.15}$$

は指数函数の巾級数展開であり、指数函数の定義を与えている。更に、$z = e^{i\theta}$ とおいて、実部と虚部ごと (θ=実数とする) にまとめると、Euler の公式により

$$\begin{aligned} \cos\theta &= 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \theta^{2n} \\ \sin\theta &= \frac{1}{1!}\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} \end{aligned} \tag{5.16}$$

が得られる。これらは、sine, cosine 函数の巾級数展開である。$|\theta| \ll 1$ の時、特に有用である。

5. 単振子

伸び縮みしない長さ ℓ の糸に質量 m の重りをつけて吊す。T を糸の張力として、運動方程式は

$$ma_r = mg\cos\theta - T \quad , \qquad ma_\theta = -mg\sin\theta \tag{5.17}$$

である。ここに、θ は糸の垂直方向からの振れ角である。極座標表示で $r = \ell =$ 一定、より、$a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 = -\ell(\dot{\theta})^2$, $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \ell\ddot{\theta}$. そこで

$$T = mg\cos\theta + m\ell(\dot{\theta})^2 \qquad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \tag{5.18}$$

が得られる。今度は $\dot{\theta}$ は一定ではない。しかし、$|\theta| \ll 1$ (振れ角は小さい) として $\sin\theta$ を $\theta = 0$ のまわりに展開して、$\sin\theta = \theta - (1/3!)\theta^3 + \cdots$ の θ の１次までとると、新しく $\omega = \sqrt{g/\ell}$ として（$\dot{\theta}$ ではない!)、Eq. (5.18) の二番目の式は

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0 \tag{5.19}$$

となる。これは、単振動の式 Eq. (5.7) で $x \to \theta$ としたものだから

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t + \delta) \tag{5.20}$$

ここに、θ_0, δ は任意定数である。振動の周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{5.21}$$

(同じ T だが、張力の T と区別する。) すなわち、振動が小さい ($\theta_0 \ll 1$ radian) 時は周期は振幅 θ_0 によらない。これを、「振り子の等時性」という。また、m にもよらない。(ガリレオの観察)