A4 演習ノート (H18.5)

テキスト: Nuclear and Particle Physics Simulations
Chapter 3, Relativistic Kinematics, pp. 44 - 71

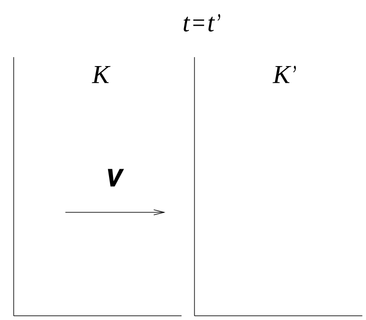
目次

1. 座標系、Lorentz 変換、不変量

[Newton の三法則]

1. 慣性系の存在
2. $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$
3. 作用・反作用の法則

$\mathcal{K} : \boldsymbol{x} = (x, y, z)$
$\mathcal{K}' : \boldsymbol{x}' = (x', y', z')$
慣性系 $\cdots$ 運動方程式は不変
$t = t'$ 絶対時間



$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{V}t \qquad \to \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V} \quad : \quad \text{Galilei 変換}$$

[マイケルソン・モーリーの実験]

"光の速度はどんな慣性系でみても一定" $\qquad c \sim 3 \times 10^{10}$ cm/s

[Lorentz 変換]

$$\mathcal{K} : \boldsymbol{x} = (x, y, z) : \text{非相対論} \to x^\mu = (ct, x, y, z) = (ct, \boldsymbol{x})$$

しばしば $c = 1$ の単位系を用いる

内積を導入する $\longrightarrow$ Minkovsky 空間

$$(x, y) = {}^t x g y = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu \qquad \boxed{\text{bilinear metric}}$$

Einstein の規約：上下の同じ添え字で sum (縮約) をとる

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} : \text{Minkovsky 空間の計量テンソル}$$

$g_{\mu\nu}$ は x^μ の添え字を上げ下げする
$x^\mu = (ct, \boldsymbol{x})$ (反変ベクトル) $\quad \longleftrightarrow \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\boldsymbol{x})$ (共変ベクトル)
座標変換は $\mathcal{K}' : x'^\mu = (ct', x', y', z')$ として

$$x^\mu = a^\mu_\nu \, (x')^\nu \longrightarrow x = ax' \qquad \text{と書く}$$

内積を不変にする様な変換：Lorentz 変換

$$(x, y) = (ax', ay') = {}^t(ax') g (ay') = {}^t x' ({}^t a g a) y' = {}^t x' g y' \quad \longleftarrow \quad (x', y')$$

より

$${}^t a g a = g \qquad \text{ならよい} \ \longrightarrow \ a \text{ に制限がつく}$$

簡単のために、空間 1 次元で考える：$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\text{答えは} \qquad a = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}$$

実際 $(\cosh\phi)^2 - (\sinh\phi)^2 = 1$ より

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ -\sinh\phi & -\cosh\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$x = ax'$ を具体的に書くと

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
s^2 &= (ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - (x')^2 \qquad \text{不変量} \\
&= (c\tau)^2 \quad \text{世界間隔} \qquad x^\mu = (ct, x) \quad \text{世界点} \qquad \tau \quad \text{不変時間}
\end{aligned}
$$

$$
ct = (\cosh\phi)ct' + (\sinh\phi)x' \quad , \qquad x = (\sinh\phi)ct' + (\cosh\phi)x'
$$

特に、$\mathcal{K}'$ 系の原点を考えると、$x' = 0$ より、$V = (x/t)$ を $\mathcal{K}$ 系における $\mathcal{K}'$ 系の原点の速度として

$$
\begin{aligned}
ct &= (\cosh\phi)ct' \\
x &= (\sinh\phi)ct' \quad \longrightarrow \quad \frac{V}{c} = \tanh\phi = \beta \quad \text{と書く}
\end{aligned}
$$

つまり $\beta = (V/c) = \tanh\phi$
$(\cosh\phi)^2 - (\sinh\phi)^2 = 1$ より $(\mathrm{sech}\phi)^2 = (1/\cosh\phi)^2 = 1 - (\tanh\phi)^2 = 1 - (V/c)^2$
そこで

$$
\begin{aligned}
\sinh\phi &= \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \beta\gamma \\
\cosh\phi &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \qquad (>1) \qquad \text{と書く}
\end{aligned}
$$

β を γ で表すと $1 - \beta^2 = 1/\gamma^2$ より

$$
\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \qquad \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}
$$

そこで Lorentz 変換 は

$$
\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \qquad \text{or} \qquad \begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma(\beta ct' + x') \end{aligned}
$$

$$
\boxed{t = \frac{t' + (V/c^2)\,x'}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \quad , \qquad x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-(V/c)^2}}}
$$

$c \longrightarrow \infty$ の時、

$$
t = t' \quad , \qquad x = x' + Vt' \qquad \text{と、Galilei 変換へもどる}
$$

[速度の合成]

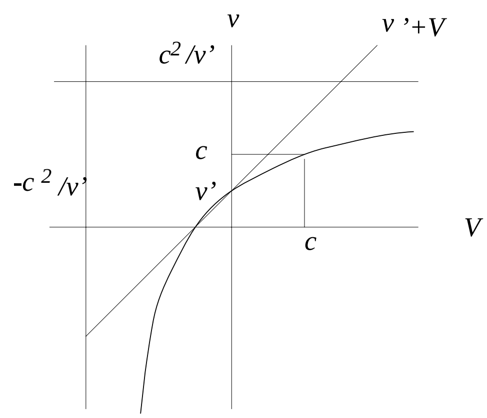
$$\begin{aligned} dt &= \gamma\left(dt' + \frac{\beta}{c}dx'\right) \\ dx &= \gamma\left(\beta c dt' + dx'\right) \end{aligned}$$

より、$v = dx/dt$ 、$v' = dx'/dt$ として

$$v = \frac{\beta c dt' + dx'}{dt' + \frac{\beta}{c}dx'} = \frac{v' + \beta c}{1 + \frac{\beta}{c}v'} = \frac{v' + V}{1 + \frac{V}{c^2}v'}$$

分母が 1 から変更を受ける

$$\begin{aligned} v &= v' + \frac{\left(1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2\right)V}{1 + \frac{V}{c^2}v'} \\ &= \frac{c^2}{v'}\frac{V + v'}{V + \frac{c^2}{v'}} = \frac{c^2}{v'}\left(1 + \frac{v' - \frac{c^2}{v'}}{V + \frac{c^2}{v'}}\right) \\ &= \frac{c^2}{v'} - \frac{c^2\left(\left(\frac{c}{v'}\right)^2 - 1\right)}{V + \frac{c^2}{v'}} \end{aligned}$$



$V = c$ の時、$v = (v' + c)/\left(1 + \frac{v'}{c}\right) = c$ また $v' = c \longrightarrow$ 常に $v = c$ (光速一定)

[四元ベクトル]

「一般に、座標と同じ様に変換する物理量をベクトルという」
Lorentz 変換 : $x = ax' = L(x')$ for $\mathcal{K}' \longrightarrow \mathcal{K}$ が基準となる

(いくつかの例)

(四元速度)

$$ds = \sqrt{(cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = cdt\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = cdt\sqrt{1 - \beta^2}$$

$u^\mu = (dx^\mu/ds)$ とすると $u = au'$ $\longrightarrow$ u は四元ベクトル
$x^\mu = (ct, \boldsymbol{x})$ より

$$
\begin{aligned}
u^0 &= \frac{dx^0}{ds} = \frac{cdt}{cdt\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \\
\boldsymbol{u} &= \frac{d\boldsymbol{x}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{x}}{cdt\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\gamma}{c}\boldsymbol{v} = \gamma\boldsymbol{\beta}
\end{aligned}
$$

そこで $u = (u^0, \boldsymbol{u}) = (\gamma, \gamma\boldsymbol{\beta})$

$$
u^2 = \gamma^2 - (\gamma\boldsymbol{\beta})^2 = \gamma^2(1-\beta^2) = \frac{1}{1-\beta^2}(1-\beta^2) = 1
$$

(四元加速度)

$$
a^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2x^\mu}{ds^2}
$$

$u^2 = 1$ より $u^\mu a_\mu = 0$ or $ua = 0$ $\longrightarrow$ 四元速度と四元加速度は互いに直交している

(四元運動量)

$$
P = mcu = (mc\gamma, mc\gamma\boldsymbol{\beta}) = \left(\frac{E}{c}, \boldsymbol{p}\right)
$$

$P^2 = (mc)^2$ (or $P^2 = m^2$)：質量は不変量

$$
\begin{aligned}
E &= mc^2\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\
\boldsymbol{p} &= mc\gamma\boldsymbol{\beta} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \boldsymbol{p}^2 = (mc)^2 \qquad \text{or} \qquad \left(\frac{E}{c}\right)^2 = \boldsymbol{p}^2 + (mc)^2
$$

普通 $c = 1$ の単位系をとって $E^2 = m^2 + \boldsymbol{p}^2$ と書く

$$
\begin{aligned}
&E = c\sqrt{(mc)^2 + \boldsymbol{p}^2} = mc^2\sqrt{1 + \left(\frac{\boldsymbol{p}}{mc}\right)^2} \\
&\sim mc^2\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{p}}{mc}\right)^2 + \frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\boldsymbol{p}}{mc}\right)^4 + \cdots\right\} = mc^2 + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{1}{8}\frac{\boldsymbol{p}^4}{m^3c^2} + \cdots
\end{aligned}
$$

と非相対論的近似される

(四元 current)

密度 ρ は不変量ではないので $J = (\rho\gamma, \rho\gamma\boldsymbol{\beta})$ とすることはできない。$dm = \rho dxdydz$ が不変量である。今、x 方向への運動を考えると Lorentz 収縮 $dx|_{dt=0} = (1/\gamma)\, dx'$ ($\mathcal{K}'$: body fixed 系 : $dt = 0$ の条件に注意！長さを測るためには、時間を揃えておかねばならない) より $\rho dx = \rho' dx' \longrightarrow \rho = \gamma\rho'$ である

そこで rest frame での密度を $\rho' = \rho_0$ として $J = (\rho c, \rho\boldsymbol{v})$ とすると

$$J^2 = \rho^2 \left(c^2 - \boldsymbol{v}^2\right) = \rho^2 c^2 \left(1 - \beta^2\right) = \frac{\rho^2 c^2}{\gamma^2} = {\rho_0}^2 c^2$$

つまり四元 current は普通の定義でよい。ρ_0 (or ρ/γ) が不変量である

[3 次元の Lorentz 変換]

z-軸方向への運動に対しては

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

or

$$\begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E'/c \\ {p_x}' \\ {p_y}' \\ {p_z}' \end{pmatrix}$$

一般の方向への Lorentz 変換はあまり簡単ではないが、空間回転の generator の手法を用いて書き下す事が出来る。

(3 次元回転)

Pauli matrix $\qquad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

or $\qquad x,\ y,\ z \longrightarrow 1,\ 2,\ 3 \qquad$ として

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

(これは $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) + i\boldsymbol{\sigma}\cdot[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]$. 特に、$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = \boldsymbol{a}^2$ と同じ)

ここに、反対称テンソル：$[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]_k = \varepsilon_{ijk}a_ib_j$ で ε_{ijk} は $\varepsilon_{123}=1$, $\varepsilon_{213}=-1$ and ijk cyclic

$$\begin{aligned}[\sigma_i,\sigma_j] &= \sigma_i\sigma_j-\sigma_j\sigma_i = 2\varepsilon_{ijk}\sigma_k \\ \{\sigma_i,\sigma_j\} &= \sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{n}$ を単位ベクトル ($|\boldsymbol{n}|=1$) として

$$\begin{aligned}&e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n\sigma}} = \cos\frac{\theta}{2}+i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\sin\frac{\theta}{2} \\ &e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n\sigma}}\boldsymbol{\sigma}e^{-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}\cos\theta+[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\sigma}]\sin\theta+(1-\cos\theta)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\end{aligned}$$

が示せる

$e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n\sigma}}$ は $\boldsymbol{n}$-軸まわりの、大きさ θ の空間 3 次元回転の generator である。実際、無限小回転 $\theta\sim\varepsilon$ に対して 1 次までとると

$$\begin{aligned}&e^{i\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{n\sigma}}\boldsymbol{\sigma}e^{-i\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{n\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}+\varepsilon[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\sigma}] \\ &e^{i\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{n\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})e^{-i\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{n\sigma}} = (\boldsymbol{\sigma}+\varepsilon[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\sigma}])\cdot\boldsymbol{a} \\ &= \boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{a}-\varepsilon[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}]) = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}'\end{aligned}$$

より $\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}-\varepsilon[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}]$

$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_z$ (z-軸方向への単位ベクトル) として、各成分で書くと

$$\begin{aligned}{a_x}' &= a_x+\varepsilon a_y \\ {a_y}' &= a_y-\varepsilon a_x \\ {a_z}' &= a_z\end{aligned}$$

更に $a_x=r\cos\theta$, $a_y=r\sin\theta$ として

$$\begin{aligned}{a_x}' &= r\cos(\theta-\varepsilon)=r\cos\theta\cos\varepsilon+r\sin\theta\sin\varepsilon\sim a_x+\varepsilon a_y \\ {a_y}' &= r\sin(\theta-\varepsilon)=r\sin\theta\cos\varepsilon-r\cos\theta\sin\varepsilon\sim a_y-\varepsilon a_x \qquad \text{で O.K.}\end{aligned}$$

有限角に対しては

$$\begin{aligned}&e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})e^{-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n\sigma}} = \{\boldsymbol{\sigma}\cos\theta+[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\sigma}]\sin\theta+(1-\cos\theta)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\}\cdot\boldsymbol{a} \\ &= \boldsymbol{\sigma}\cdot\{\boldsymbol{a}\cos\theta-[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}]\sin\theta+(1-\cos\theta)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{n}\} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}'\end{aligned}$$

より

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}\cos\theta-[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}]\sin\theta+(1-\cos\theta)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{n}$$

特に、$\boldsymbol{n}$ を z-軸にとると

$$\begin{aligned} a_x{}' &= a_x \cos\theta + a_y \sin\theta \\ a_y{}' &= a_y \cos\theta - a_x \sin\theta \\ a_z{}' &= a_z \end{aligned}$$

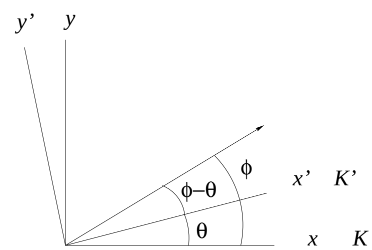
or

$$\begin{pmatrix} a_x{}' \\ a_y{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$$

として

$$\begin{pmatrix} a_x{}' \\ a_y{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi-\theta) \\ r\sin(\phi-\theta) \end{pmatrix}$$



Lorentz 変換に拡張するために、まず四次元 Pauli matrix γ^μ を導入する。標準表示では

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \qquad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad 4 \times 4 \text{ matrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \qquad (Cf.\ \boldsymbol{\alpha}^2 = 1,\ \boldsymbol{\Sigma}^2 = 1)$$

$$R(\theta, \boldsymbol{n}) = R(\boldsymbol{\theta}) = e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\Sigma}} \qquad (|\boldsymbol{\theta}| = \theta,\ \widehat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{n})$$

として $\mathcal{K} \xrightarrow{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{K}'$ の変換に対して

$$R(\boldsymbol{\theta})\,\gamma p\, R(\boldsymbol{\theta})^{-1} = \gamma p'$$

とすると

$$R(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&R(\boldsymbol{\theta})\,\gamma^0\,R(\boldsymbol{\theta})^{-1} = \gamma^0 \\
&R(\boldsymbol{\theta})\,\boldsymbol{\gamma}\,R(\boldsymbol{\theta})^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}e^{-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}} \\ -e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}e^{-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{\gamma}\cos\theta + [\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\gamma}]\sin\theta + (1-\cos\theta)(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}
\end{aligned}
$$

より $\boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\gamma}$ となっただけで以前と同じ

$$
\begin{aligned}
p^{0\prime} &= p^0 \\
\boldsymbol{p}' &= \boldsymbol{p}\cos\theta - [\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}]\sin\theta + (1-\cos\theta)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{n}
\end{aligned}
$$

が得られる

(Lorentz 変換)

$$
\begin{aligned}
&L(\phi,\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = L(\boldsymbol{\beta}) = e^{-\frac{\phi}{2}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha}} \qquad (\tanh\phi = \beta = |\boldsymbol{\beta}|) \\
&= \cosh\frac{\phi}{2} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha}\sinh\frac{\phi}{2} \qquad (\leftarrow (\widehat{\boldsymbol{\beta}}\cdot\boldsymbol{\alpha})^2 = 1)
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{\sigma}$-matrix の reduction を根気よく計算すると

$$
\begin{aligned}
e^{-\frac{\phi}{2}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha}}\,\gamma^0\,e^{\frac{\phi}{2}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha}} &= \gamma^0\cosh\phi + \boldsymbol{\gamma}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\sinh\phi \\
e^{-\frac{\phi}{2}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha}}\,\boldsymbol{\gamma}\,e^{\frac{\phi}{2}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{\gamma} + \gamma^0\widehat{\boldsymbol{\beta}}\sinh\phi + (\boldsymbol{\gamma}\cdot\widehat{\boldsymbol{\beta}})\widehat{\boldsymbol{\beta}}(\cosh\phi - 1)
\end{aligned}
$$

が得られる。ここから

$$
L(\boldsymbol{\beta})\,\gamma p\,L(\boldsymbol{\beta})^{-1} = \gamma p'
$$

$$
\begin{aligned}
p^{0\prime} &= p^0\cosh\phi - (\boldsymbol{p}\cdot\widehat{\boldsymbol{\beta}})\sinh\phi \\
\boldsymbol{p}' &= \boldsymbol{p} + (\boldsymbol{p}\cdot\widehat{\boldsymbol{\beta}})\widehat{\boldsymbol{\beta}}(\cosh\phi - 1) - p^0\widehat{\boldsymbol{\beta}}\sinh\phi
\end{aligned}
$$

がわかる

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ 方向を x-軸、それに垂直な任意の方向を $\widehat{\boldsymbol{n}}$、z-軸方向を $[\widehat{\boldsymbol{\beta}}\times\widehat{\boldsymbol{n}}]$ とすると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p} &= (\boldsymbol{p}\cdot\widehat{\boldsymbol{\beta}})\widehat{\boldsymbol{\beta}} + (\boldsymbol{p}\cdot\widehat{\boldsymbol{n}})\widehat{\boldsymbol{n}} + (\boldsymbol{p}\cdot[\widehat{\boldsymbol{\beta}}\times\widehat{\boldsymbol{n}}])[\widehat{\boldsymbol{\beta}}\times\widehat{\boldsymbol{n}}] \\
&= p_x\boldsymbol{e}_x + p_y\boldsymbol{e}_y + p_z\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}
$$

として

$$
\begin{aligned}
p^{0\prime} &= p^0 \cosh\phi - p_x \sinh\phi \\
{p_x}' &= -p^0 \sinh\phi + p_x \cosh\phi \\
{p_y}' &= p_y \\
{p_z}' &= p_z
\end{aligned}
$$

特に

$$
\begin{pmatrix} p^{0\prime} \\ {p_x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi \\ -\sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^0 \\ p_x \end{pmatrix}
$$

or

$$
\begin{pmatrix} p^0 \\ p_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{0\prime} \\ {p_x}' \end{pmatrix}
$$

これは、以前の結果である。

2. 粒子の崩壊の Kinematics

Lorentz 変換

$$
\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}
$$

で $\mathcal{K}'$ 系を body fixed 系にとると、原点にある粒子が $t' = \tau$ で崩壊したとして lab 系では

$$
\begin{aligned}
ct &= \gamma c\tau \\
x &= \gamma\beta c\tau
\end{aligned}
$$

そこで $x = \beta ct = vt$: t は lab 系での寿命、x は飛翔距離である
一般に粒子の運動は、エネルギーで表すのが便利である

$$
\begin{pmatrix} E/c \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mc \\ 0 \end{pmatrix}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\frac{E}{c} &= \gamma mc \qquad \longrightarrow \qquad \gamma = \frac{E}{mc^2} \\
p &= \gamma\beta mc \qquad \longrightarrow \qquad \beta = \frac{p}{\gamma mc} = \frac{cp}{E}
\end{aligned}
$$

$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ を逆に解いて $\beta = \sqrt{1-(1/\gamma)^2}$ より、飛翔距離は

$$
x = \beta\gamma c\tau = c\tau\sqrt{\gamma^2 - 1} = c\tau\sqrt{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1}
$$

(例) 5 GeV の π^- が上空で生成されて、それが地上に達するまでに μ^- に崩壊し、更に電子とニュートリノに崩壊する。

$$
\begin{aligned}
\pi^-(5\ \mathrm{GeV}) \longrightarrow \quad & \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\
& \hookrightarrow e^- + \bar{\nu}_e
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_{\pi^-} &= 2.6 \times 10^{-8}\ \mathrm{s} \qquad \rightarrow \qquad c\tau_{\pi^-} = 7.8\ \mathrm{m} \\
\tau_{\mu^-} &= 2.2\ \mu\mathrm{s} = 2.2 \times 10^{-6}\ \mathrm{s} \qquad \rightarrow \qquad c\tau_{\mu^-} = 660\ \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

である。

a) π-on の飛翔距離はいくらか？ (答え: 278 m)

b) π^- が μ^- に 10^5 feet (1 foot=0.3048 m) の上空で崩壊したとして、μ^- が地上に到達するためには、μ^- の γ と運動量はいくらでないといけないか？ (答え: $\gamma > 46$, $p = 4.6$ GeV/c より大)

[不変質量について]

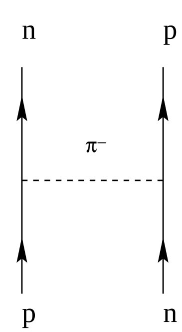
四元運動量は加算量である。従って、系全体だけでなく、各部分系に対して Lorentz 変換が適用でき、不変質量が定義できる。この事は、Lorentz 変換が線型変換である事に基づいている。すなわち、相対論的 kinematics は、その系が複合系であるか elementary particle であるかにはよらない。一方、四元運動量保存則は閉じた系にしか成り立っていない。

$$
\begin{aligned}
E &= \sum_i \varepsilon_i \qquad \left(\frac{\varepsilon_i}{c}\right)^2 = (m_i c)^2 + \boldsymbol{p}_i{}^2 \\
\boldsymbol{P} &= \sum_i \boldsymbol{p}_i \qquad \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \boldsymbol{P}^2 = \text{不変質量}
\end{aligned}
$$

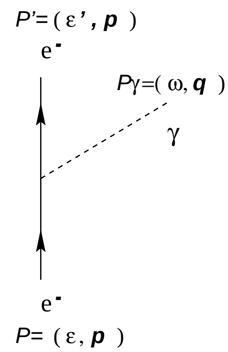
(補遺) real な粒子は、常に $P^2 = m^2$ を満たす。一方、$P^2 \neq m^2$ の粒子は virtual であるといわれる。

(例 1) One-Pion Exchange Potential (OPEP) の excahnged π-on

$$
\begin{aligned}
p &\leftrightarrow n + \pi^+ \\
m_p &< m_n + m_{\pi^+}
\end{aligned}
$$



(例 2) 自由電子からの光子放出は real process としては存在しない。
$P = P' + P_\gamma$ (四元運動量の保存) より



$$
\begin{aligned}
P_\gamma &= P - P' \\
{P_\gamma}^2 &= P^2 + P'^2 - 2PP' \\
&= 2{m_e}^2 - 2(\varepsilon\varepsilon' - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}')
\end{aligned}
$$

だが、${P_\gamma}^2$ は不変量だから、どんな座標系で計算してもよい。そこで、終りの電子の静止系で計算すると $\varepsilon' = m_e$, $\boldsymbol{p}' = 0$ より

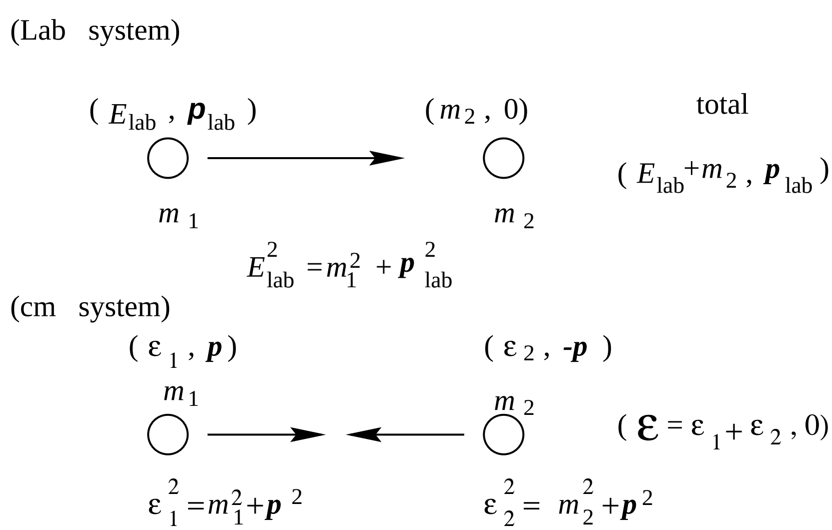
$$
{P_\gamma}^2 = 2{m_e}^2 - 2m_e\varepsilon = 2m_e(m_e - \varepsilon)
$$

一方、$\varepsilon = m_e c^2/\sqrt{1-(v/c)^2} > m_e$ より、常に ${P_\gamma}^2 < 0 \longrightarrow$ virtual photon
$\longrightarrow (\omega/c) < |\boldsymbol{q}|$: space-like

3. 二体弾性散乱の Kinematics

total energy は、cm 系では $\mathcal{E} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. また $\boldsymbol{p}^2 = {\varepsilon_1}^2 - {m_1}^2 = {\varepsilon_2}^2 - {m_2}^2$ より因数分解して $\mathcal{E}$ を使うと

$$
\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{{m_1}^2 - {m_2}^2}{\mathcal{E}} \quad , \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \mathcal{E}
$$



そこで

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{E}+\frac{{m_1}^2-{m_2}^2}{\mathcal{E}}\right)=\frac{\mathcal{E}^2+{m_1}^2-{m_2}^2}{2\mathcal{E}} \\
\varepsilon_2 &= \frac{\mathcal{E}^2-{m_1}^2+{m_2}^2}{2\mathcal{E}} \\
\boldsymbol{p}^2 &= {\varepsilon_1}^2-{m_1}^2=(\varepsilon_1-m_1)(\varepsilon_1+m_1) \\
&= \frac{1}{4\mathcal{E}^2}\left(\mathcal{E}^2+{m_1}^2-{m_2}^2-2\mathcal{E}m_1\right)\left(\mathcal{E}^2+{m_1}^2-{m_2}^2+2\mathcal{E}m_1\right) \\
&= \frac{1}{4\mathcal{E}^2}\left((\mathcal{E}-m_1)^2-{m_2}^2\right)\left((\mathcal{E}+m_1)^2-{m_2}^2\right) \\
&= \frac{1}{4\mathcal{E}^2}\left(\mathcal{E}-m_1+m_2\right)\left(\mathcal{E}-m_1-m_2\right)\left(\mathcal{E}+m_1+m_2\right)\left(\mathcal{E}+m_1-m_2\right)
\end{aligned}
$$

結局

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\mathcal{E}^2+{m_1}^2-{m_2}^2}{2\mathcal{E}} \\
\varepsilon_2 &= \frac{\mathcal{E}^2-{m_1}^2+{m_2}^2}{2\mathcal{E}} \\
|\boldsymbol{p}| &= \frac{\sqrt{\left(\mathcal{E}+m_1+m_2\right)\left(\mathcal{E}-m_1+m_2\right)\left(\mathcal{E}+m_1-m_2\right)\left(\mathcal{E}-m_1-m_2\right)}}{2\mathcal{E}}
\end{aligned}
$$

一方、$\mathcal{E}$ は lab energy から求まる。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}^2 &= (E_{lab}+m_2)^2-{\boldsymbol{p}_{lab}}^2={E_{lab}}^2-{\boldsymbol{p}_{lab}}^2+2m_2E_{lab}+{m_2}^2 \\
&= {m_1}^2+{m_2}^2+2m_2E_{lab} \qquad \longrightarrow \qquad E_{lab}=\frac{\mathcal{E}^2-{m_1}^2-{m_2}^2}{2m_2}
\end{aligned}
$$

普通 $E_{lab}=m_1+T_{lab}$ と分けて、T_{lab} を入射 “kinetic” energy という
これを使うと

$$
\mathcal{E}=\sqrt{(m_1+m_2)^2+2m_2T_{lab}}
$$

そこで、mass が与えられたとして、$T_{lab}\longrightarrow\mathcal{E}\longrightarrow\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ |\boldsymbol{p}|$ がすべて決まる。
($Cf.$ $E_{lab}=m_1+T_{lab}$ だが ${E_{lab}}^2={m_1}^2+{\boldsymbol{p}_{lab}}^2$ に注意)

[cm 運動量と lab 運動量 (入射運動量) との関係]

$$
\begin{aligned}
{\boldsymbol{p}_{lab}}^2 &= {E_{lab}}^2-{m_1}^2=(E_{lab}+m_1)(E_{lab}-m_1) \\
&= \left(\frac{\mathcal{E}^2-{m_1}^2-{m_2}^2}{2m_2}+m_1\right)\left(\frac{\mathcal{E}^2-{m_1}^2-{m_2}^2}{2m_2}-m_1\right) \\
&= \frac{1}{4{m_2}^2}\left(\mathcal{E}^2-(m_1-m_2)^2\right)\left(\mathcal{E}^2-(m_1+m_2)^2\right) \\
&= \frac{1}{4{m_2}^2}\left(\mathcal{E}+m_1+m_2\right)\left(\mathcal{E}-m_1+m_2\right)\left(\mathcal{E}+m_1-m_2\right)\left(\mathcal{E}-m_1-m_2\right)
\end{aligned}
$$

より

$$|\boldsymbol{p}_{lab}| = \frac{\sqrt{(\mathcal{E}+m_1+m_2)(\mathcal{E}-m_1+m_2)(\mathcal{E}+m_1-m_2)(\mathcal{E}-m_1-m_2)}}{2m_2}$$

そこで

$$\frac{|\boldsymbol{p}|}{|\boldsymbol{p}_{lab}|} = \frac{m_2}{\mathcal{E}} \qquad \longrightarrow \quad |\boldsymbol{p}_{cm}| = \frac{m_2}{\mathcal{E}}|\boldsymbol{p}_{lab}|$$

非相対論的近似では $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$ (換算質量) として

$$\begin{aligned} E_{cm}^{NR} &= \frac{\boldsymbol{p}_{cm}^2}{2\mu} = \frac{1}{2\mu}{\boldsymbol{p}_{lab}}^2\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{(m_1+m_2)}{m_1m_2}\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2{\boldsymbol{p}_{lab}}^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{m_2}{m_1(m_1+m_2)}{\boldsymbol{p}_{lab}}^2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}T_{lab} \end{aligned}$$

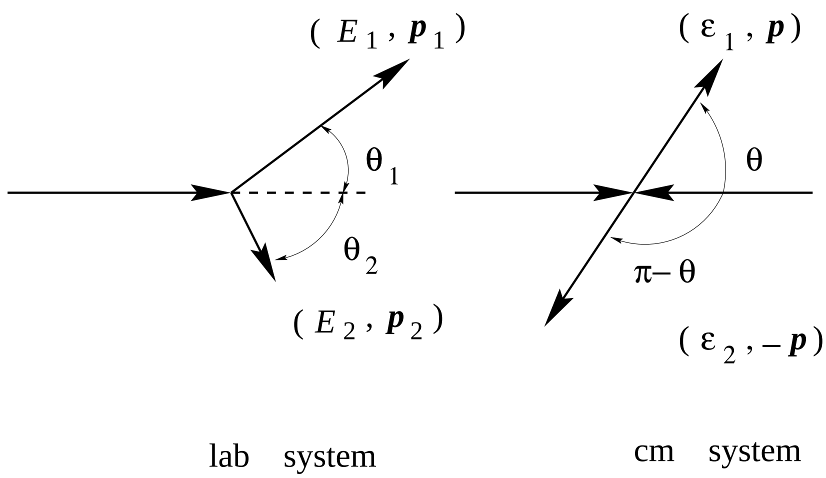
ここに $T_{lab} = ({\boldsymbol{p}_{lab}}^2/2m_1)$

$$|\boldsymbol{p}_{cm}| = \frac{m_2}{\mathcal{E}}|\boldsymbol{p}_{lab}| \qquad \longleftrightarrow \qquad E_{cm}^{NR} = \frac{m_2}{m_1+m_2}T_{lab}$$

(相対論) (非相対論)

の類似に注意

[角分布]



1 番目の粒子に対する Lorentz 変換は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_1 \\ (p_1)_\parallel \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ p_\parallel \end{pmatrix} \\ (p_1)_\perp &= p_\perp \end{aligned}$$

崩壊角でかくと

$$\begin{aligned} E_1 &= \gamma\left(\varepsilon_1 + \beta p\cos\theta\right) \\ p_1\cos\theta_1 &= \gamma\left(p\cos\theta + \beta\varepsilon_1\right) \\ p_1\sin\theta_1 &= p\sin\theta \end{aligned}$$

そこで

$$\tan\theta_1 = \frac{p\sin\theta}{\gamma\left(p\cos\theta + \beta\varepsilon_1\right)} = \frac{\sin\theta}{\gamma\left(\cos\theta + \beta\varepsilon_1/p\right)}$$

ここで $\beta^* = p/\varepsilon_1$ (2 次粒子の cm 系における速度) と定義すると

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin\theta}{\gamma\left(\cos\theta + \frac{\beta}{\beta^*}\right)}$$

or

$$\cot\theta_1 = \gamma\left(\cot\theta + \frac{\beta}{\beta^*}\frac{1}{\sin\theta}\right)$$

β は系全体の Lorentz 変換から求まる

$$\begin{pmatrix} E_{lab} + m_2 \\ p_{lab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ 0 \end{pmatrix}$$

より

$$E_{lab} + m_2 = \gamma\mathcal{E} \quad , \qquad p_{lab} = \beta\gamma\mathcal{E} \qquad \longrightarrow \qquad \beta = \frac{p_{lab}}{E_{lab} + m_2}$$

そこで

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\beta^*} &= \frac{\varepsilon_1}{p}\frac{p_{lab}}{E_{lab} + m_2} = \frac{\left(\mathcal{E}^2 + {m_1}^2 - {m_2}^2\right)}{2\mathcal{E}}\frac{\mathcal{E}}{m_2}\frac{1}{E_{lab} + m_2} \\ &= \frac{\left({m_1}^2 + {m_2}^2 + 2m_2E_{lab}\right) + {m_1}^2 - {m_2}^2}{2m_2\left(E_{lab} + m_2\right)} = \frac{{m_1}^2 + m_2E_{lab}}{m_2\left(E_{lab} + m_2\right)} \end{aligned}$$

つまり

$$\frac{\beta}{\beta^*} = \frac{E_{lab} + \frac{(m_1)^2}{m_2}}{E_{lab} + m_2}$$

非相対論的近似では

$$\frac{\beta}{\beta^*} \sim \frac{{m_1}^2 + m_1m_2}{m_2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{m_2}$$

特に、同種粒子の時 $\beta/\beta^* = 1$。この時

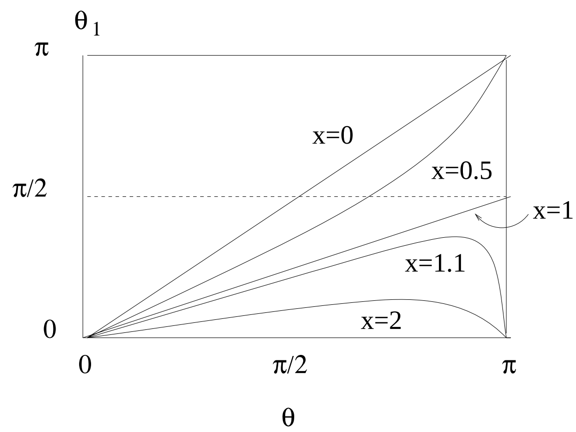
$$\tan\theta_1 = \frac{1}{\gamma}\frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{1}{\gamma}\tan\frac{\theta}{2} \qquad \longrightarrow \qquad \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\gamma}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

非相対論的近似の時のみ $\gamma \sim 1$ で $\theta_1 = \theta/2$

一般の 2 粒子系に対しては

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + x}$$

$$\text{with} \qquad x = \frac{m_1}{m_2}$$



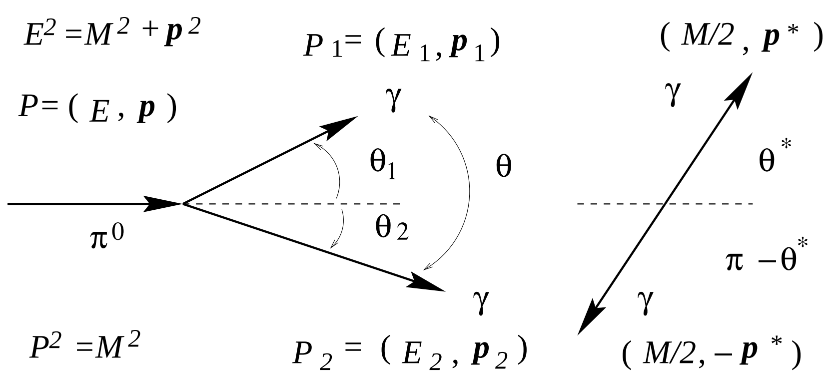
$x = 1$ の時の相対論的効果：$\pi \to \pi/2$ だが θ_1 少し小さくなる。

2 次粒子が massless (γ, ν 等) の時、$\beta^* = 1$ より

$$\cot\theta_1 = \gamma\left(\cot\theta + \frac{\beta}{\sin\theta}\right)$$

$\theta = \pi/2$ の時 cot $\theta_1 = \gamma\beta = \sqrt{\gamma^2 - 1} = 0 \sim \infty$
特定のエネルギーに対して θ_1 は $0 \sim \pi$ のいかなる値もとりうる。
(maximum angle はない) 例：$\pi \to \mu\nu$ の ν (see Exercises 3.8)

4. $\pi^0 \to 2\gamma$ decay の opening angle



Lab system　　　　　　　　cm system

$$\begin{aligned} M^2 &= P^2 = (P_1 + P_2)^2 = {P_1}^2 + {P_2}^2 + 2P_1P_2 \\ &= 2\left(E_1E_2 - \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2\right) = 2E_1E_2(1 - \cos\theta) \\ &= 4E_1E_2\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 \qquad \longrightarrow \qquad M = 2\sqrt{E_1E_2}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

一方、1 番目の γ の Lorentz 変換を考えると

$$\begin{aligned} E_1 &= \gamma\left(\frac{M}{2} + \beta\frac{M}{2}\cos\theta^*\right) = \frac{1}{2}\gamma M(1+\beta\cos\theta^*) \\ E_1\cos\theta_1 &= \gamma\left(\frac{M}{2}\cos\theta^* + \beta\frac{M}{2}\right) = \frac{1}{2}\gamma M(\beta+\cos\theta^*) \\ E_1\sin\theta_1 &= \frac{M}{2}\sin\theta^* \end{aligned}$$

同様に、2 番目の γ に対しては $1 \to 2,\ \theta^* \to \pi - \theta^*$ として

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{2}\gamma M(1-\beta\cos\theta^*) \\ E_2\cos\theta_2 &= \frac{1}{2}\gamma M(\beta-\cos\theta^*) \\ E_2\sin\theta_2 &= \frac{M}{2}\sin\theta^* \end{aligned}$$

$Cf.$

$$\begin{aligned} &E_1 + E_2 = \gamma M = E \ :\ \text{total energy} \\ &E_1\cos\theta_1 + E_2\cos\theta_2 = \gamma M\beta = |\boldsymbol{p}| \ :\ \text{total momentum} \\ &E_1\sin\theta_1 = E_2\sin\theta_2 \qquad \longrightarrow \qquad E_1 = E_2 \quad \text{なら} \quad \theta_1 = \theta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}\gamma M(1+\beta\cos\theta^*) \\ E_2 &= \frac{1}{2}\gamma M(1-\beta\cos\theta^*) \end{aligned}$$

より

$$\sqrt{E_1E_2} = \frac{1}{2}\gamma M\sqrt{1-\beta^2(\cos\theta^*)^2}$$

一方、以前の式より、これは $(M/2\sin\frac{\theta}{2})$ より

$$\frac{1}{2}\gamma M\sqrt{1-\beta^2(\cos\theta^*)^2} = \frac{M}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

そこで、θ^* を θ の函数として求めると

$$\sqrt{1-\beta^2(\cos\theta^*)^2} = \frac{1}{\gamma\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\beta^2(\cos\theta^*)^2 = 1 - \left(\frac{1}{\gamma\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

or

$$\cos\theta^* = \pm\frac{1}{\beta}\sqrt{1-\left(\frac{1}{\gamma\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2}$$

つまり、$\gamma\sin(\theta/2)=1$ が $\theta^*=\pi/2$ に対応する。

cm 系での π^0 の崩壊の角分布が等方的と仮定して、θ についての lab 系での角分布を求める

$$\frac{dn}{d\theta} = \frac{dn}{d(\cos\theta^*)}\frac{d(\cos\theta^*)}{d\theta} = \frac{1}{2}\frac{d(\cos\theta^*)}{d\theta} \quad \longleftarrow \quad \int_{-1}^{1}\frac{dn}{d(\cos\theta^*)}d(\cos\theta^*) = 1$$

一方、上の式より

$$\begin{aligned}
\frac{d(\cos\theta^*)}{d\theta} &= \pm\frac{1}{\beta}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\gamma\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2}}\frac{2}{\left(\gamma\sin\frac{\theta}{2}\right)^3}\gamma\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\
&= \pm\frac{1}{2\beta}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\gamma\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2}}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\gamma^2\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^3} \\
&= \pm\frac{1}{2\beta\gamma}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\sqrt{\left(\gamma\sin\frac{\theta}{2}\right)^2-1}}
\end{aligned}$$

より θ^* と $\pi-\theta^*$ の寄与 (1 と 2) を加えると、2 倍して

$$\begin{aligned}
\frac{dn}{d\theta} &= 2\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2\beta\gamma}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\sqrt{\left(\gamma\sin\frac{\theta}{2}\right)^2-1}} \\
&= \frac{1}{2\beta\gamma}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\sqrt{\left(\gamma\sin\frac{\theta}{2}\right)^2-1}}
\end{aligned}$$

ここに、β,γ は $E=\gamma M=E_{\pi^0}$ から求まる。

θ の角分布に minimum の値が存在する。

$$\gamma\sin\frac{\theta_{\min}}{2}=1 \qquad \text{or} \qquad \sin\frac{\theta_{\min}}{2}=\frac{1}{\gamma}=\frac{M}{E_{\pi^0}}$$

$\longrightarrow$ E_{π^0} 大なら $\theta_{\min}$ はどんどん小さくなる。この時、cm 系での崩壊角度は $\theta^*=\pi/2$ (進行方向と垂直である)

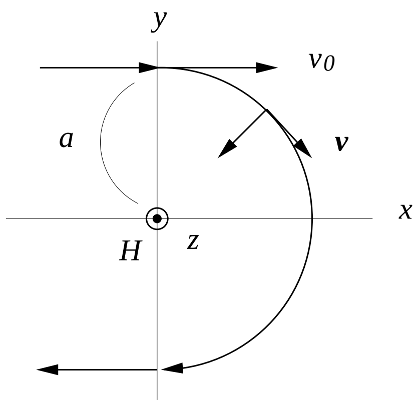
もし $E_{\pi^0}=M$ なら $\theta_{\min}=\pi$ (静止している場合)

$\theta_{\min}$ と E_{π^0} から M が分かる。特に $E_{\pi^0}\gg M$ なら、$\theta_{\min}\sim 0$ より

$$\theta_{\min} = 2\frac{M}{E_{\pi^0}}$$

5. 古典的サイクロトロン運動の相対論的補正

$e > 0$ と仮定 ($e < 0$ の時は磁場を反対向きにかける)



$$\dot{\boldsymbol{p}} = \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H} \quad \cdots \text{Lorentz 力で曲がる}$$

(非相対論)

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H} \rightarrow m\boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} = 0 \rightarrow \boldsymbol{v}^2 = \text{const}$$
$$\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{e}{mc}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}$$

$\omega = (eH/mc)$ として

$$\begin{cases} \dot{v_x} = \omega v_y & \boldsymbol{v}_0 = (v_0, 0, 0) \\ \dot{v_y} = -\omega v_x & \\ \dot{v_z} = 0 & \rightarrow \quad v_z = \text{const} = 0 \end{cases}$$

これを解いて

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y)$$
$$v_x + iv_y = v_0 e^{-i\omega t}$$
$$\left(\begin{array}{l} v_x = v_0 \cos\omega t \\ v_y = -v_0 \sin\omega t \end{array} \right. \qquad \left(\begin{array}{l} x = x_0 + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \\ y = y_0 + \frac{v_0}{\omega}\cos\omega t \end{array} \right.$$

$t = 0$ で $x = 0, y = a$ として

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \\ y &= a + \frac{v_0}{\omega}(\cos\omega t - 1) \end{aligned}$$

$$x^2 + \left(y - \left(a - \frac{v_0}{\omega}\right)\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

$a = v_0/\omega$ と H (or a) を選ぶと $x^2 + y^2 = a^2$
ここに p_0 を入射運動量として

$$a = \frac{v_0}{\omega} = \frac{mcv_0}{eH} = \frac{cp_0}{eH}$$

(相対論)

$\dot{\boldsymbol{p}} = \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}$ で

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\frac{\boldsymbol{v}}{c^2} = \mathcal{E}\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}$$

非相対論の場合と同じく $\boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{p}} = 0 \longrightarrow \boldsymbol{p}^2 = \mathrm{const} \longrightarrow \mathcal{E}^2 = m^2 + \boldsymbol{p}^2$ より $\mathcal{E} = \mathrm{const}$
そこで運動方程式は

$$\frac{\mathcal{E}}{c^2}\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H} \longrightarrow \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{ce}{\mathcal{E}}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}$$

そこで $\omega = \frac{ecH}{\mathcal{E}}$ と定義すれば、あとは非相対論の場合とまったく同じ。
特に、サイクロトロン運動の半径は

$$a = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0\mathcal{E}}{ecH} = v_0\frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\frac{1}{ecH} = \frac{p_0c}{ecH} = \frac{cp_0}{eH}$$

この式は p_0 の定義が

$$p_0 = \frac{mv_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

である事を除いて、非相対論の場合とまったく同じである。特に、$v_0 \ll c$ なら $\mathcal{E} \sim mc^2$ として

$$\omega = \frac{ecH}{\mathcal{E}} \sim \frac{ecH}{mc^2} = \frac{eH}{mc}$$

と非相対論にもどる。