平成 11 年度「物理数学」(前期) 試験問題 (H11 年 9 月 22 日実施)

1) (Cauchy-Riemann の微分方程式)

単連結領域 D において定義された連続な複素数値関数 $f(z)$ が正則である (つまり、「任意の $z \in D$ において あらゆる方向からの微分係数が存在して、それらがすべて等しい」) ためには、$f(z)$ の実部と虚部を $u(x,y)$ 、$v(x,y)$ $(z = x + iy)$ として、これらが Cauchy-Riemann の微分方程式を満たすことが、必要かつ十分であることを示せ。

2) (Schwarz の鏡像原理)

複素平面の上半面で $f(z)$ が解析的、かつ、実軸上で連続かつ実数なら、$f(z)$ は $h(z) = \overline{f(\overline{z})}$ により下半面へ解析接続されることを示せ。ここに、$\overline{z}$ は z の複素共役である。

3) (Gauss 積分)

まず、実変数の定積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, d\,x = \sqrt{\pi}$$

を示したのち、任意の複素数 $\alpha \in \boldsymbol{C}$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\alpha)^2}\, d\,x = \sqrt{\pi}$$

となることを示せ。また、正なる実数 $\lambda > 0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}\, d\,x = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つが、これを複素数の λ にまで拡張できるためには λ としてどのような条件が必要か ? (答だけではだめ。それを証明すること)

4) (Laurent 展開)

n が正の整数の時、関数 $f(z) = e^z \sum_{r=1}^{n} \frac{(r-1)!}{z^r}$ の Laurent 展開が

$$e^z \sum_{r=1}^{n} \frac{(r-1)!}{z^r} = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s} \frac{n!}{(n-s)!} \left(\frac{1}{z}\right)^s + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m!} - \frac{n!}{(n+m)!}\right) z^m$$

となることを示せ。(ヒント: $\frac{1}{(1-x)^{a+1}} = \sum_{u=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a+u \\ u \end{pmatrix} x^u$ から導かれる公式 $\sum_{r=0}^{u} \begin{pmatrix} a-1+r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+u \\ u \end{pmatrix}$ を、証明のうえ使ってもよい。)