3　解析函数の応用

3.1　留数定理による定積分の計算

3.1.1　留数定理

[**留数**]

$f(z)$ が $z=a$ で m 次の極をもつとする。

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-a}+\phi(z)$$

ここに $\phi(z)$ は z の近傍で解析的。a_{-1} を極 $z=a$ における留数 (residue) といい、$a_{-1}=\mathrm{Res}\,(f,a)$ と書く。

a を囲む小さな円 c を考えると、n を整数として $z=a+\varepsilon e^{i\theta}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{dz}{(z-a)^{n+1}}=\frac{1}{\varepsilon^n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}d\theta=\left\{\begin{array}{l}1\\0\end{array}\right.\qquad \text{for}\qquad \left\{\begin{array}{l}n=0\\n\neq 0\end{array}\right.$$

$\phi(z)$ が c の上と内部で解析的なら

$$\int_c f(z)dz=2\pi i a_{-1}$$

閉曲線 C で囲まれた領域内に函数 $f(z)$ が有限個の極 $a,\ b,\ c,\cdots$ を持ち、その留数が $a_{-1},\ b_{-1},\ c_{-1},\cdots$ であるとする。$f(z)$ は C 上と C の内部で、これらの極を除いて解析的であるとすると

$$\int_C f(z)dz=2\pi i a_{-1}+2\pi i b_{-1}+\cdots$$

これを

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\left(\sum_k \mathrm{Res}\,(f,z_k)\right)\qquad (\text{留数定理})$$

と書く。(Cauchy の積分定理の拡張) 留数の和は、C に含まれるすべての極についてとるものとする。

(証明) $a,\ b,\ c,\cdots$ のまわりの小さな円を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ として

$$\int_C f(z)dz=\int_\alpha f(z)dz+\int_\beta f(z)dz+\cdots$$

として、前の公式を適用すればよい。(そうした小さな円があるという事は、極がその定義により、孤立する事から保証される。)

○ $f(z)$ の a が 1 次の極 (simple pole) なら、その留数は

$$\mathrm{Res}\,(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

m 次の極なら

$$\mathrm{Res}\,(f,a) = \frac{1}{(m-1)\,!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)$$

3.1.2 定積分の計算

省略 $\cdots$ 物理数学演習で実習のこと。

3.2 部分分数展開

3.2.1 部分分数展開 (最も簡単な場合)

$f(z)$: 全複素平面で極を除いて解析的、かつ、有限領域に 1 次の極を持つとする。

$$\begin{aligned}&a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots \\ &0 < |a_1| \le |a_2| \le |a_3| \le \cdots \qquad (\text{原点で正則}) \\ &b_1,\ b_2,\ b_3, \cdots \qquad \text{留数}\end{aligned}$$

だけとする。(有理型函数ならよい。この時、同じ絶対値を持つ有限個の極をひとまとめにして考えると、$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \infty$) 半径 R_m の原点を中心とする円の列 $\{C_m\}$ があって、$R_m \to \infty$ $(m\to\infty)$ であり、それらは極を通らず、その上で $|f(z)|$ が一定の M でおさえられるとする。つまり

$$|f(z)| < M \qquad \text{for} \qquad z \in C_m, \qquad {}^\forall m = 1,\ 2,\ \cdots$$

x が $f(z)$ の極でないとして、留数定理を使うと

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_m}\frac{f(z)}{z-x}dz = f(x) + \sum_r \frac{b_r}{a_r - x}$$

ここに $\sum_r$ の和は C_m に囲まれる、全ての極についてとる。

一方、

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z(z-x)}$$

より、左辺は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_m}\frac{f(z)}{z-x}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_m}\frac{f(z)}{z}dz+\frac{x}{2\pi i}\int_{C_m}\frac{f(z)}{z(z-x)}dz \\ &= f(0)+\sum_r\frac{b_r}{a_r}+\frac{x}{2\pi i}\int_{C_m}\frac{f(z)}{z(z-x)}dz\end{aligned}$$

ここで、$m\to\infty$ とすると

$$\left|\int_{C_m}\frac{f(z)}{z(z-x)}dz\right|\le M\int_{C_m}\frac{1}{|z-x|}\left|\frac{dz}{z}\right|\sim O\left(\frac{1}{R_m}\right)\to 0 \quad \text{for} \quad m\to\infty$$

そこで

$$f(x)=f(0)+\sum_{r=1}^{\infty}b_r\left(\frac{1}{x-a_r}+\frac{1}{a_r}\right)$$

ここに、$\sum_{r=1}^{\infty}$ は全ての極についてとる。この時、a_n の近傍を除く全ての点で一様収束。実際 $|x|<a$ なら

$$\left|\frac{x}{2\pi i}\int_{C_m}\frac{f(z)}{z(z-x)}dz\right|\le\frac{Ma}{R_m-|a|}$$

○ $|f(z)|\le M$ の代わりに、もっと緩やかな条件

$$\begin{aligned}&|z^{-p}f(z)|<M \qquad \text{for} \qquad {}^{\forall}z\in C_m\\ &M:\text{independent of } m \qquad p:\text{正の整数}\end{aligned}$$

の場合にも適用可能。実際

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-x} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{x}{z}}=\frac{1}{z}\left\{\frac{1-\left(\frac{x}{z}\right)^{p+1}}{1-\frac{x}{z}}+\frac{1}{1-\frac{x}{z}}\left(\frac{x}{z}\right)^{p+1}\right\}\\ &= \sum_{n=0}^{p}\frac{x^n}{z^{n+1}}+\frac{1}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{p+1}\end{aligned}$$

を用いて

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_m}\frac{f(z)}{z-x}dz = \sum_{n=0}^{p}x^n\frac{1}{2\pi i}\int_{C_m}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_m}\frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{p+1}dz$$

とすればよい。この時、最後の項は

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_m}\frac{f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{p+1}dz\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_{C_m}|z^{-p}f(z)|\frac{|x|^{p+1}}{|z-x|}\left|\frac{dz}{z}\right|\\ &\le\frac{Ma^{p+1}}{R_m-|a|}\to 0 \qquad \text{for} \qquad R_m\to\infty\end{aligned}$$

でおさえられる。(上は $p=0$ の場合である。)

$\circ$ 上の半径 R_m の円 C_m は、円から変形された閉じた閉曲線であってもよい。この時 C_m の長さ L_m に対して、$L_m = O(R_m)$ である事を要請する。

(例 1)

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right)$$

or

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$$

(証明) $f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$ とする。$f(z)$ の極は $z = n\pi$ $(n = \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$ で全て 1 次。留数は

$$\begin{aligned} r_n &= \lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)f(z) = \lim_{x\to 0} x\left(\frac{1}{\sin(n\pi+x)} - \frac{1}{n\pi+x}\right) \\ &= \lim_{x\to 0}(-1)^n\frac{x}{\sin x} = (-1)^n \end{aligned}$$

$f(z)$ は半径 $R_n = (n+1/2)\pi$ $(n\to\infty)$ の円 C_m の上で有界である事を示す必要があるが、ここでは、その代わりに右図 (省略) の様な正方形についてそれを示す。

x-軸に平行な部分では $z = x \pm i(n+1/2)\pi$ で

$$\begin{aligned} |\sin z| &= \left|\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right| = \frac{1}{2}\left|e^{\mp\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+ix} - e^{\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi-ix}\right| \\ &\geq \frac{1}{2}\left|e^{\mp\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} - e^{\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right| = \left|\sinh\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right| \geq \sinh\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

y-軸に平行な部分では $z = \pm(n+1/2)\pi + iy$ より、

$$\begin{aligned} |\sin z| &= \frac{1}{2}\left|e^{-y\pm i\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} - e^{y\mp i\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right| = \frac{1}{2}\left|e^{y} - e^{-y\pm i(2n+1)\pi}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|e^{y}+e^{-y}\right| = \cosh y \geq 1 \end{aligned}$$

そこで $f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$ は n に関係なく一様に有界。また $f(0) = 0$ より

$$\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} = \sum_{n\neq 0}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right)$$

(例 2)

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n\pi}+\frac{1}{n\pi}\right)$$

実際、極の位置は同じで、留数は

$$r_n = \lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)\left(\cot z-\frac{1}{z}\right)=\lim_{x\to 0}x\frac{\cos x}{\sin x}=1$$

より、上で $(-1)^n \to 1$ とすればよい。$\cot z$ も上の経路上で一様有界。実際、 $z = x \pm i(n+1/2)\pi$ では

$$\begin{aligned}|\tan z| &= \left|\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}\right| = \left|\frac{e^{2ix\mp(2n+1)\pi}-1}{e^{2ix\mp(2n+1)\pi}+1}\right| \\ &\geq \frac{|e^{\mp(2n+1)\pi}-1|}{e^{\mp(2n+1)\pi}+1} \to 1 \qquad \text{for} \qquad n\to\infty\end{aligned}$$

$z = \pm(n+1/2)\pi + iy$ では

$$|\tan z| = \left|\frac{e^{\pm(2n+1)\pi i-2y}-1}{e^{\pm(2n+1)\pi i-2y}+1}\right| = \left|\frac{1+e^{-2y}}{1-e^{-2y}}\right| = |\coth y| \geq 1 \qquad \text{for} \qquad {}^\forall y \in \boldsymbol{R}$$

3.2.2 無限乗積展開との関係

$f(z)$ は全複素平面で解析的、かつ $a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots$ (${}^\forall|a_n| > 0,\ \lim_{n\to\infty}|a_n| = \infty$) で 1 次の零点 (simple zero) を持つとする。この時、$f'(z)$ は全平面で解析的で $\frac{f'(z)}{f(z)}$ は $a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots$ でだけ 1 次の極を持つ。実際

$$f(z) = (z-a_r)\varphi(z)$$

$\varphi(z)$ は $z = a_r$ の近傍で解析的、かつ $\varphi(a_r) \neq 0$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a_r} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

より $f'(z)/f(z)$ は $z = a_r$ で 1 次の極を持ち、留数は 1。$f'(z)/f(z)$ が C_m $(m\to\infty)$ 上で一様に有界だと仮定すると

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-a_r}+\frac{1}{a_r}\right)$$

$|a_1| \leq |a_2| \leq \cdots$ となる場合は、適当に (有限個を) グルーピングして一様収束となるから、項別積分出来て

$$\int\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{f'(0)}{f(0)}z + \sum_{r=1}^{\infty}\left\{\int\frac{dz}{z-a_r}+\frac{z}{a_r}\right\} + \text{const}$$

or

$$\log f(z) = \frac{f'(0)}{f(0)}z + \sum_{r=1}^{\infty}\left\{\log(z-a_r)+\frac{z}{a_r}\right\} + \text{const}$$

exp をとって

$$f(z) = Ce^{\frac{f'(0)}{f(0)}z} \prod_{r=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_r}\right) e^{\frac{z}{a_r}} \right\}$$

$f(0) = C$ より

$$f(z) = f(0)e^{\frac{f'(0)}{f(0)}z} \prod_{r=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_r}\right) e^{\frac{z}{a_r}} \right\}$$

を得る。

(例) $f(z) = (\sin z)/z$ の無限乗積展開

$z = n\pi$ $(n = \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$ で 1 次の零点。$f(0) = 1$, $f'(z) = (\cos z)/z - (\sin z)/z^2$, $f'(0) = 0$ より $f'(z)/f(z) = \mathrm{cot} z - 1/z$ が C_m 上で一様有界である事が示されれば (前の例 2 で済んでいる)

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{\frac{z}{n\pi}} \right\} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n\pi}\right) e^{-\frac{z}{n\pi}} \right\} = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 - \left(\frac{z}{n\pi}\right)^2 \right\}$$

or $z \to \pi z$ として

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \left(1 - z^2\right)\left(1 - \frac{z^2}{4}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9}\right)\cdots$$

この無限積は絶対一様収束する。

3.2.3 Mittag-Leffler の定理

省略

3.2.4 部分分数展開の一般化

省略

3.3 無限級数展開

3.3.1 Darboux の公式

$f(z)$: a と z を結ぶ直線上で解析的、$\phi(t)$: t の n 次の多項式とする。

$$\frac{d}{dt} \sum_{m=1}^{n} (-1)^m (z-a)^m \phi^{(n-m)}(t) f^{(m)}(a + t(z-a))$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt}\Big\{-(z-a)\phi^{(n-1)}(t)f^{(1)}(a+t(z-a))\\
&+(z-a)^2\phi^{(n-2)}(t)f^{(2)}(a+t(z-a))\\
&-\cdots\\
&+(-1)^n(z-a)^n\phi(t)f^{(n)}(a+t(z-a))\Big\}\\
&= -(z-a)\phi^{(n)}(t)f^{(1)}(a+t(z-a))-(z-a)^2\phi^{(n-1)}(t)f^{(2)}(a+t(z-a))\\
&+(z-a)^2\phi^{(n-1)}(t)f^{(2)}(a+t(z-a))+(z-a)^3\phi^{(n-2)}(t)f^{(3)}(a+t(z-a))\\
&-\cdots\\
&+(-1)^n(z-a)^n\phi^{(1)}(t)f^{(n)}(a+t(z-a))+(-1)^n(z-a)^{n+1}\phi(t)f^{(n+1)}(a+t(z-a))\\
&= -(z-a)\phi^{(n)}(t)f^{(1)}(a+t(z-a))+(-1)^n(z-a)^{n+1}\phi(t)f^{(n+1)}(a+t(z-a))
\end{aligned}
$$

ここに、$\phi^{(n)}(t) = \mathrm{const} = \phi^{(n)}(0)$。そこで t について $t=0\sim 1$ まで積分して

$$
\begin{aligned}
&\text{左辺} = \sum_{m=1}^{n}(-1)^m(z-a)^m\left[\phi^{(n-m)}(1)f^{(m)}(z)-\phi^{(n-m)}(0)f^{(m)}(a)\right]\\
&\text{右辺第 1 項} = -\phi^{(n)}(0)\left[f(z)-f(a)\right]\\
&\text{右辺第 2 項} = (-1)^n(z-a)^{(n+1)}\int_0^1\phi(t)f^{(n+1)}(a+t(z-a))dt
\end{aligned}
$$

そこで

$$
\begin{aligned}
&\phi^{(n)}(0)\left[f(z)-f(a)\right] = \sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}(z-a)^m\left[\phi^{(n-m)}(1)f^{(m)}(z)-\phi^{(n-m)}(0)f^{(m)}(a)\right]\\
&+(-1)^n(z-a)^{(n+1)}\int_0^1\phi(t)f^{(n+1)}(a+t(z-a))dt \qquad \text{(Darboux の公式)}
\end{aligned}
$$

○ 特に $\phi(t)=(t-1)^n$ とすると

$$
\begin{aligned}
&\phi^{(n)}(t)=n\,! \quad , \quad \phi^{(n-m)}(t)=\frac{n\,!}{m\,!}(t-1)^m \quad , \quad \phi^{(n-m)}(1)=0 \quad \text{for} \quad m=1,\ 2,\ \cdots,\ n\\
&\phi^{(n-m)}(0)=(-1)^m\frac{n\,!}{m\,!}
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
n\,!\,[f(z)-f(a)] \;&=\; \sum_{m=1}^{n}(z-a)^m\frac{n\,!}{m\,!}f^{(m)}(a)\\
&+(-1)^n(z-a)^{(n+1)}\int_0^1(t-1)^nf^{(n+1)}(a+t(z-a))dt
\end{aligned}
$$

or

$$
\begin{aligned}
&f(z)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m\,!}f^{(m)}(a)(z-a)^m+R_n\\
&R_n=\frac{1}{n\,!}(z-a)^{(n+1)}\int_0^1(1-t)^nf^{(n+1)}(a+t(z-a))dt
\end{aligned}
$$

$n \to \infty$ とすると Taylor 展開である。

○ R_n の表式で p を $p \leq n$ なる負でない整数 ($p = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$) として

$$R_n = \frac{1}{n\,!}(z-a)^{(n+1)}\int_0^1 (1-t)^p(1-t)^{n-p}f^{(n+1)}(a+t(z-a))dt$$

$(1-t)^{n-p}f^{(n+1)}(a+t(z-a))$ の t についての上限と下限を $U,\ L$ とすると

$$\int_0^1 L(1-t)^p dt \leq \int_0^1 (1-t)^p(1-t)^{n-p}f^{(n+1)}(a+t(z-a))dt \leq \int_0^1 U(1-t)^p dt$$

$(1-t)^{n-p}f^{(n+1)}(a+t(z-a))$ は t の連続函数より、平均値の定理から $0<\theta<1$ があって

$$\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a+t(z-a))dt = \int_0^1 (1-t)^p(1-\theta)^{n-p}f^{(n+1)}(a+\theta(z-a))dt$$
$$= -\frac{(1-t)^{p+1}}{p+1}\bigg|_0^1 (1-\theta)^{n-p}f^{(n+1)}(a+\theta(z-a)) = \frac{1}{p+1}(1-\theta)^{n-p}f^{(n+1)}(a+\theta(z-a))$$

そこで

$$R_n = \frac{(z-a)^{n+1}}{n\,!\,(p+1)}(1-\theta)^{n-p}f^{(n+1)}(a+\theta(z-a))$$

$p = n$ とすると

$$R_n = \frac{(z-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}f^{(n+1)}(a+\theta(z-a)) \qquad \text{Lagrange's form for the remainder}$$

$p = 0$ とおくと

$$R_n = \frac{(z-a)^{n+1}}{n\,!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(a+\theta(z-a)) \qquad \text{Cauchy's form for the remainder}$$

$n = 0$ とおくと 2 つとも同じ式になって

$$f(z) - f(a) = (z-a)f'(a+\theta(z-a)) \qquad \text{with} \quad 0 \leq \theta \leq 1 \qquad (\text{第 1 平均値の定理})$$

3.3.2 Bernoulli 数

○ $\frac{z}{e^z-1}$ は $z = 2n\pi i$ ($n = \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$) に 1 次の極を持つ。そこで $z = 0$ のまわりの Taylor 展開は

$$\frac{z}{e^z-1} = 1 + b_1 z + \frac{b_2}{2\,!}z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n\,!}z^n \qquad (|z| < 2\pi)$$

ここに、$b_0 = 1$。これと

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n\,!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)\,!} z^m$$

を掛けて

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_n}{n\,!(m+1)\,!} z^{n+m} = 1$$

これを

$$\sum_{N=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n+m=N} \frac{1}{n\,!(m+1)\,!} b_n \right\} z^N = 1$$

と書いて、$(N+1)\,!$ を掛けておくと

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\begin{array}{c} N+1 \\ n \end{array} \right) b_n = 0 \qquad \text{for} \qquad N = 1,\ 2,\ \cdots$$

$N \to N-1$ として

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right) b_n = 0 \qquad \text{for} \qquad N = 2,\ 3,\ \cdots$$

$b_n = b^n$ と書くと

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right) b^n - b^N = 0$$

より

$$(b+1)^N - b^N = 0$$

$$\begin{array}{llll}
N=2 & 2b_1 + 1 = 0 & \rightarrow & b_1 = -\dfrac{1}{2} \\
N=3 & 3b_2 + 3b_1 + 1 = 0 & \rightarrow & b_2 = \dfrac{1}{6} \\
N=4 & 4b_3 + 6b_2 + 4b_1 + 1 = 0 & \rightarrow & b_3 = 0 \\
N=5 & 5b_4 + 10b_3 + 10b_2 + 5b_1 + 1 = 0 & \rightarrow & b_4 = -\dfrac{1}{30} \\
\cdots & & &
\end{array}$$

そこで

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{6} \frac{1}{2\,!} z^2 - \frac{1}{30} \frac{1}{4\,!} z^4 + \cdots \qquad (|z| < 2\pi)$$

あるいは、z で割っておくと

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^z-1} &= \frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\frac{1}{2\,!}z-\frac{1}{30}\frac{1}{4\,!}z^3+\cdots \\ &= \frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\varphi(z)\end{aligned}$$

ここに

$$\varphi(z)=\frac{1}{e^z-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\mathrm{coth}\,\frac{z}{2}-\frac{1}{z}$$

は z の odd 函数で、$\varphi(-z)=-\varphi(z)$ より $\varphi(z)$ は z の奇数冪乗で展開できる。そこで

$$\varphi(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b_n}{n\,!}z^{n-1}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_{2m}}{(2m)\,!}z^{2m-1}=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{B_m}{(2m)\,!}z^{2m-1}$$

とおくと

$$B_m=(-1)^{m-1}b_{2m}\qquad m=1,\ 2,\ \cdots$$

これを、Bernoulli 数という。Bernoulli 数 B_m は次の recursion relation を満たす。

$$B_n=(-1)^n\left[\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2}-\sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^m}{2m}\begin{pmatrix}2n\\2m-1\end{pmatrix}B_m\right]\qquad n=2,\ 3,\ \cdots$$

結局

$$\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{B_m}{(2m)\,!}z^{2m-1}\qquad (|z|<2\pi)$$

$$B_1=\frac{1}{6}\ ,\qquad B_2=\frac{1}{30}\ ,\qquad B_3=\frac{1}{42}\ ,\qquad B_4=\frac{1}{30}\ ,\qquad B_5=\frac{5}{66}\ ,\ \cdots$$

○ $\varphi(z)$ の展開で $z\to iz$ とし $\mathrm{coth}\,iz=(1/i)\cot z$ を使うと $\cot z$ の Laurent 展開が得られる。($z\to 2z$ として)

$$\cot z=\frac{1}{z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_n}{(2n)\,!}z^{2n-1}$$

また、$\tan z$ の Taylor 展開は

$$\tan z=\cot z-2\cot 2z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)\,!}B_n z^{2n-1}$$

○ 部分分数展開のところで

$$\cot z=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{z-n\pi}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$$

を示したが、z を掛けて

$$\begin{aligned}\frac{2z^2}{z^2-(n\pi)^2} &= -\frac{2z^2}{(n\pi)^2}\frac{1}{1-\left(\frac{z}{n\pi}\right)^2} \\ &= -2\left(\frac{z}{n\pi}\right)^2\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{z}{n\pi}\right)^{2m} = -2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n\pi}\right)^{2m}\end{aligned}$$

と展開して

$$z\cot z = 1-2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n\pi}\right)^{2m}$$

この 2 重級数は $|z|<\pi$ で絶対一様収束するから (確かめよ!) 2 つの無限和をとる順序を変えてもよい。Riemann の zeta 函数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \qquad (s>1)$$

を使うと

$$z\cot z = 1-2\sum_{m=1}^{\infty}\zeta(2m)\left(\frac{z}{\pi}\right)^{2m} \qquad \text{for} \quad |z|<\pi$$

これを $z\cot z$ の Laurent 展開と比較して

$$\zeta(2m) = \frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{(2m)\,!}B_m \qquad \text{for} \quad m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

を得る。ここから

$$\begin{aligned}\zeta(2) &= 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots = \frac{2\pi^2}{2\,!}B_1 = \frac{\pi^2}{6} \\ \zeta(4) &= 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots = \frac{2^3\pi^4}{4\,!}B_2 = \frac{\pi^4}{90}\end{aligned}$$

3.3.3 Bernoulli 数の定積分による表現

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{e^{2\pi x}-1}dx = \frac{1}{4}\left(\frac{e^a+1}{e^a-1}\right)-\frac{1}{2a} \qquad \text{(Legendre)}$$

(証明) 右辺は $(1/2)\varphi(a)$ より $a>0$ と仮定してよい。右図 (省略) の経路にそって

$$\int\frac{e^{iaz}}{e^{2\pi z}-1}dz$$

の積分を考える。まず ℓ_1 の寄与は $R \to \infty$ の時 0。

$$\left|\int_0^1 \frac{e^{ia(R+iy)}}{e^{2\pi(R+iy)}-1} idy\right| \le \int_0^1 \frac{e^{-ay}}{e^{2\pi R}-1}dy$$
$$\to e^{-2\pi R}\int_0^1 e^{-ay}dy = e^{-2\pi R}\frac{1-e^{-a}}{a} \to 0 \qquad \text{as} \quad R\to\infty$$

1/4 の小さい半円の半径を ε とすると x 軸に平行な部分の寄与は

$$\begin{aligned}\int_{\ell_2}+\int_{\ell_3} &= \int_\varepsilon^R \frac{e^{iax}}{e^{2\pi x}-1}dx + \int_R^\varepsilon \frac{e^{ia(x+i)}}{e^{2\pi(x+i)}-1}dx \\ &= \left(1-e^{-a}\right)\int_\varepsilon^R \frac{e^{iax}}{e^{2\pi x}-1}dx\end{aligned}$$

ℓ_4 の寄与は $z=iy,\ y=1-\varepsilon\sim\varepsilon$ として

$$\int_{\ell_4} = \int_{1-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{e^{ia(iy)}}{e^{2\pi iy}-1}idy = -i\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy}-1}dy$$

δ_1 と δ_2 の寄与は、δ_2 では $z\to z+i$ と変数変換して $e^{iaz}\to e^{-a}e^{iaz}$ より $z=\varepsilon e^{i\theta}$ として

$$\int_{\delta_1}+\int_{\delta_2} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{2\pi z}{e^{2\pi z}-1}e^{iaz}\frac{dz}{2\pi z} + e^{-a}\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\frac{2\pi z}{e^{2\pi z}-1}e^{iaz}\frac{dz}{2\pi z}$$
$$\sim i\frac{1}{2\pi}\left(1\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)+e^{-a}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -i\frac{1}{4}\left(1+e^{-a}\right)$$

そこで、$\varepsilon\to 0,\ R\to\infty$ へ行って

$$\left(1-e^{-a}\right)\int_0^\infty \frac{e^{iax}}{e^{2\pi x}-1}dx - i\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\frac{e^{-ay}}{e^{2\pi iy}-1}dy - i\frac{1}{4}\left(1+e^{-a}\right)=0 \qquad \text{for} \qquad \varepsilon\to\infty$$

ここで、imaginary part をとると、第 2 項目で

$$\Im m\ (-i)\frac{1}{e^{2\pi iy}-1} = -\Re e\frac{1}{e^{2\pi iy}-1} = \frac{1}{2}$$

より

$$\left(1-e^{-a}\right)\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^{2\pi x}-1}dx + \frac{1-e^{-a}}{2a} - \frac{1}{4}\left(1+e^{-a}\right)=0$$

つまり

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^{2\pi x}-1}dx &= \frac{1}{1-e^{-a}}\left\{\frac{1}{4}\left(1+e^{-a}\right)-\frac{1}{2a}\left(1-e^{-a}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{e^a+1}{e^a-1}\right)-\frac{1}{2a}\end{aligned}$$

○ 次に $\frac{1}{e^a-1}$ の Bernoulli 数による展開を使うと

$$\frac{1}{4}\left(\frac{e^a+1}{e^a-1}\right)-\frac{1}{2a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^a-1}-\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{B_m}{(2m)\,!}a^{2m-1}$$

より

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^{2\pi x}-1}dx=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{B_m}{(2m)\,!}a^{2m-1} \qquad \text{for} \qquad |a|<2\pi$$

更に

$$\sin ax=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{1}{(2m-1)\,!}(ax)^{2m-1}$$

と展開して、もし積分と和の順序が交換できるなら a^{2m-1} の係数を比較して

$$(-1)^{m-1}\frac{1}{(2m-1)\,!}\int_0^\infty \frac{x^{2m-1}}{e^{2\pi x}-1}dx=\frac{1}{2}(-1)^{m-1}\frac{B_m}{(2m)\,!}$$

つまり

$$B_m=4m\int_0^\infty \frac{x^{2m-1}}{e^{2\pi x}-1}dx \qquad m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

が得られる。

(一様収束性の証明)

$$\left|\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^{2\pi x}-1}dx\right|\le\int_0^\infty \frac{1}{e^{2\pi x}-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)\,!}(|a|x)^{2m-1}dx$$

ここに sum は

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\cdots &= |a|x+\frac{1}{3\,!}(|a|x)^3+\cdots=|a|x\left\{1+\frac{1}{3\,!}(|a|x)^2+\frac{1}{5\,!}(|a|x)^4+\cdots\right\}\\ &\le |a|x\left\{1+\frac{1}{2\,!}(|a|x)^2+\frac{1}{4\,!}(|a|x)^4+\cdots\right\}\le |a|xe^{|a|x}\end{aligned}$$

より

$$\text{右辺}=\int_0^\infty \frac{|a|x}{e^{2\pi x}-1}e^{|a|x}dx=\left(\frac{|a|}{2\pi}\right)\int_0^\infty \frac{2\pi x}{e^{2\pi x}-1}e^{|a|x}dx$$

これは

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\pi x}{e^{2\pi x}-1}=1$$

より $x\to 0$ の近傍で収束 (一様)。$x\to\infty$ でも

$$\frac{2\pi x}{e^{2\pi x}-1}e^{|a|x}\to 2\pi xe^{-(2\pi-|a|)x}$$

より $|a|<\rho<2\pi$ で一様収束。従って、積分と sum は $a=0$ のまわりで絶対一様収束する。

3.3.4 Bernoulli 数による和公式

(Whittaker and Watson p. 145 の 7 参照)

$x_1,\ x_2$ を整数とし、$\phi(z)$ を $x_1 \leq \Re e\, z \leq x_2$ で解析的、かつ有界とする。この時

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\phi(x_1)+\phi(x_1+1)+\phi(x_1+2)+\cdots+\phi(x_2-1)+\frac{1}{2}\phi(x_2)\\&=\int_{x_1}^{x_2}\phi(x)dx+\frac{1}{i}\int_0^\infty\frac{\phi(x_2+iy)-\phi(x_1+iy)-\phi(x_2-iy)+\phi(x_1-iy)}{e^{2\pi y}-1}dy\end{aligned}$$

(証明)

$$\int\frac{\phi(z)}{e^{2\pi iz}-1}dz$$

の積分を、右の経路 (省略) について考える。まず、$\phi(z)/(e^{2\pi iz}-1)$ の $z=x_1+h$ $(h=1,\cdots,x_2-x_1-1)$ における留数は

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}\left\{\frac{\phi(z)}{e^{2\pi iz}-1},x_1+h\right\}=\lim_{z\to x_1+h}(z-x_1-h)\frac{\phi(z)}{e^{2\pi iz}-1}\\&=\phi(x_1+h)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{e^{2\pi i\varepsilon}-1}=\frac{1}{2\pi i}\phi(x_1+h)\end{aligned}$$

より

$$\int\frac{\phi(z)}{e^{2\pi iz}-1}dz=\phi(x_1+1)+\cdots+\phi(x_2-1)$$

2 つの半円のまわりの積分は $z=x_1+\zeta=x_1+\varepsilon e^{i\theta}$ として

$$\begin{aligned}&\int_{\delta_1}=\int_{\delta_1}\frac{\phi(z)}{e^{2\pi iz}-1}dz=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{2\pi i\zeta}{e^{2\pi i\zeta}-1}\phi(x_1+\zeta)\frac{1}{2\pi}d\theta\\&\to\phi(x_1)\frac{1}{2\pi}(-\pi)=-\frac{1}{2}\phi(x_1)\end{aligned}$$

同様に、x_2 も $\int_{\delta_2}=-\frac{1}{2}\phi(x_2)$。$\ell_5$ の寄与は $\phi(z)$ の有界性より $Y\to\infty$ の時 0 だが、ℓ_2 の寄与は

$$\begin{aligned}&\int_{\ell_2}=\int_{x_2}^{x_1}\frac{\phi(x+iY)}{e^{2\pi i(x+iY)}-1}dx=\int_{x_2}^{x_1}\frac{\phi(x+iY)}{e^{-2\pi Y}e^{2\pi ix}-1}dx\\&\to\int_{x_1}^{x_2}\phi(x+iY)dx\qquad(\phi\text{ 内の }Y\text{ はおいておく})\end{aligned}$$

$\ell_1,\ \ell_3,\ \ell_4,\ \ell_6$ の寄与は、

$$\int_\varepsilon^Y\frac{\phi(x_2+iy)}{e^{2\pi i(x_2+iy)}-1}idy+\int_Y^\varepsilon\frac{\phi(x_1+iy)}{e^{2\pi i(x_1+iy)}-1}idy+\int_{-\varepsilon}^{-Y}\frac{\phi(x_1+iy)}{e^{2\pi i(x_1+iy)}-1}idy$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{-Y}^{-\varepsilon}\frac{\phi(x_2+iy)}{e^{2\pi i(x_2+iy)}-1}idy = i\left\{\int_{\varepsilon}^{Y}\frac{\phi(x_2+iy)}{e^{-2\pi y}-1}dy - \int_{\varepsilon}^{Y}\frac{\phi(x_1+iy)}{e^{-2\pi y}-1}dy\right.\\
&\left.-\int_{\varepsilon}^{Y}\frac{\phi(x_1-iy)}{e^{2\pi y}-1}dy + \int_{\varepsilon}^{Y}\frac{\phi(x_2-iy)}{e^{2\pi y}-1}dy\right\}\\
&= i\left\{-\int_{\varepsilon}^{Y}\frac{e^{2\pi y}}{e^{2\pi y}-1}\left(\phi(x_2+iy)-\phi(x_1+iy)\right)dy\right.\\
&\left.+\int_{\varepsilon}^{Y}\frac{1}{e^{2\pi y}-1}\left(\phi(x_2-iy)-\phi(x_1-iy)\right)dy\right\}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\frac{e^{2\pi y}}{e^{2\pi y}-1} = 1+\frac{1}{e^{2\pi y}-1}
$$

と分けると

$$
\begin{aligned}
&\int_{\ell_1}+\int_{\ell_3}+\int_{\ell_4}+\int_{\ell_6} = -i\int_{\varepsilon}^{Y}\left[\phi(x_2+iy)-\phi(x_1+iy)\right]dy\\
&-i\int_{\varepsilon}^{Y}\frac{1}{e^{2\pi y}-1}\left\{\phi(x_2+iy)-\phi(x_1+iy)-\phi(x_2-iy)+\phi(x_1-iy)\right\}dy
\end{aligned}
$$

ここで、1 行目は ℓ_2 の寄与とあわせると

$$
\begin{aligned}
&-\int_{x_2}^{x_1}\phi(x+iY)dx - \int_{\varepsilon}^{Y}\phi(x_2+iy)idy - \int_{Y}^{\varepsilon}\phi(x_1+iy)idy\\
&= \int_{x_1}^{x_2}\phi(x)dx \qquad (\leftarrow\ \phi(z)\ \text{の解析性})
\end{aligned}
$$

結局、$\varepsilon\to 0$, $Y\to\infty$ へ移行して

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\phi(x_1)-\frac{1}{2}\phi(x_2)+\int_{x_1}^{x_2}\phi(x)dx\\
&-i\int_{0}^{\infty}\frac{\phi(x_2+iy)-\phi(x_1+iy)-\phi(x_2-iy)+\phi(x_1-iy)}{e^{2\pi y}-1}dy\\
&= \phi(x_1+1)+\cdots+\phi(x_2-1)
\end{aligned}
$$

そこで、結局

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\phi(x_1)+\phi(x_1+1)+\phi(x_1+2)+\cdots+\phi(x_2-1)+\frac{1}{2}\phi(x_2)\\
&= \int_{x_1}^{x_2}\phi(x)dx + \frac{1}{i}\int_{0}^{\infty}\frac{\phi(x_2+iy)-\phi(x_1+iy)-\phi(x_2-iy)+\phi(x_1-iy)}{e^{2\pi y}-1}dy
\end{aligned}
$$

○ 上の公式で $\phi(x)$ を $x=x_2$ のまわりに Taylor 展開して

$$
\phi(x_2+iy)-\phi(x_2-iy) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!}\phi^{(n)}(x_2)\left[(iy)^n-(-iy)^n\right]
$$

$n = odd$ だけだから $n = 2m-1,\ m = 1 \sim \infty$ として

$$i^{2m-1} - (-i)^{2m-1} = 2 \cdot i^{2m-1} = 2i \cdot i^{2m-2} = 2i(-1)^{m-1}$$

より

$$\phi(x_2 + iy) - \phi(x_2 - iy) = 2i \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{1}{(2m-1)\,!} \phi^{(2m-1)}(x_2) y^{2m-1}$$

級数は絶対一様収束 (Cauchy 条件) だから、積分と m の和の順序が交換できて

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{i} \int_0^\infty \frac{\phi(x_2 + iy) - \phi(x_2 - iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy \\
&= 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{1}{(2m-1)\,!} \phi^{(2m-1)}(x_2) \int_0^\infty \frac{y^{2m-1}}{e^{2\pi y} - 1} dy \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m)\,!} \phi^{(2m-1)}(x_2)
\end{aligned}$$

x_1 に対しても同様な式が成り立つ。結局

$$\begin{aligned}
&\phi(x_1) + \phi(x_1 + 1) + \cdots + \phi(x_2 - 1) + \phi(x_2) = \frac{1}{2}\phi(x_1) + \frac{1}{2}\phi(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \phi(x) dx \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m)\,!} \left[\phi^{(2m-1)}(x_2) - \phi^{(2m-1)}(x_1) \right]
\end{aligned}$$

ここから、$x_1 = 0,\ x_2 = n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ として

$$\begin{aligned}
&\phi(1) + \phi(2) + \cdots + \phi(n) \\
&= C + \frac{1}{2}\phi(n) + \int_0^n \phi(x) dx + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m)\,!} \phi^{(2m-1)}(n)
\end{aligned}$$

ここに C は n を含まない定数。

3.3.5　Γ 函数への応用 (Binet の第 2 公式)

無限乗積展開のところで求めた、ポリ Γ 函数の微分に対する級数に上の公式を適用すると、$\log \Gamma(z)$ に対する Binet の第 2 公式が得られる。

$$\psi'(z) = \left(\frac{d}{dz} \right)^2 \log \Gamma(z) = \frac{d}{dz} \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} \right)^2$$

$\phi(\zeta) = \left(\frac{1}{z+\zeta} \right)^2$ とすると $\phi(\zeta)$ は $\Re e\, z > 0$ の時、右半平面 $\Re e\, \zeta > 0$ で有界、かつ解析的であり、条件は満たされている。そこで、$x_1 = 0,\ x_2 = n$ として公式を適用すると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(z+n)^2} = \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(z+n)^2} + \int_0^n \frac{d\zeta}{(z+\zeta)^2} \\
&+ \frac{1}{i} \int_0^\infty \frac{1}{e^{2\pi t} - 1} \left\{ \frac{1}{(z+n+it)^2} - \frac{1}{(z+it)^2} - \frac{1}{(z+n-it)^2} + \frac{1}{(z-it)^2} \right\} dt
\end{aligned}$$

ここで

$$q(t,z) = \frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{(z+it)^2} - \frac{1}{(z-it)^2}\right\}$$

と書くと

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty \cdots dt = -2\int_0^\infty \frac{q(t,z)}{e^{2\pi t}-1}dt + 2\int_0^\infty \frac{q(t,z+n)}{e^{2\pi t}-1}dt$$

更に

$$\int_0^n \frac{d\zeta}{(z+\zeta)^2} = -\frac{1}{(z+\zeta)}\bigg|_0^n = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+n}$$

より、$n \to \infty$ へ行くと

$$\frac{d^2}{dz^2}\log\Gamma(z) = \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z} - 2\int_0^\infty \frac{q(t,z)}{e^{2\pi t}-1}dt + 2\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{q(t,z+n)}{e^{2\pi t}-1}dt \qquad (\Re e\, z > 0)$$

ここで、最後の項=0 を示す。

実際

$$\begin{aligned} q(t,z) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z+it} + \frac{1}{z-it}\right)\left(\frac{1}{z+it} - \frac{1}{z-it}\right) \\ &= (-2)\frac{z}{z^2+t^2}\frac{t}{z^2+t^2} = (-2)\left(\frac{z^2}{z^2+t^2}\right)^2\frac{t}{z^3} \end{aligned}$$

そこで

$$|q(t,z)| = 2\left|\frac{z^2}{z^2+t^2}\right|^2\frac{t}{|z|^3}$$

まず、$\Re e\, z > 0$ の時 $(t > 0)$

$$f(z) = \left|\frac{z^2}{z^2+t^2}\right| < K_z \qquad (\text{independent of } t)$$

なる K_z がとれる事を示す。$z = x + iy$ として

$$f(z)^{-2} = \left|\frac{z^2+t^2}{z^2}\right|^2 = \frac{|(x^2-y^2+2ixy)+t^2|^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^2-y^2+t^2)^2+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

これを、t の函数と考えると $f(z)^{-2}$ の最小値は $x^2 \geq y^2$ の時、$t^2 = 0$ の時最小で

$$f(z)^{-2} \geq \frac{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 1$$

$x^2 < y^2$ の時、$t^2 = y^2 - x^2$ の時最小で

$$f(z)^{-2} \geq \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

そこで $z = x + iy = re^{i\theta}$ $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ とすると

$$\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = (2\cos\theta\sin\theta)^2 = (\sin 2\theta)^2$$

より $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の時は $x^2 \geq y^2$ で

$$\left|\frac{z^2}{z^2+t^2}\right| \leq 1$$

また、$-\pi/2 < \theta < -\pi/4$ or $\pi/4 < \theta < \pi/2$ の時は $x^2 < y^2$ で

$$\left|\frac{z^2}{z^2+t^2}\right| \leq \left|\frac{1}{\sin 2\theta}\right|$$

そこで、今 $0 < \Delta < \frac{\pi}{4}$ として、$|\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \Delta$ とすると

$$(\sin 2\theta)^2 \geq (\sin(\pi - 2\Delta))^2 = (\sin 2\Delta)^2$$

より $K_z = (1/\sin 2\Delta)$ として $\Re z > 0$ の時

$$\left|\frac{z^2}{z^2+t^2}\right| \leq K_z \qquad \text{for} \quad {}^\forall t = 0 \sim \infty$$

が成り立つ。

まとめると、$0 < \Delta < \frac{\pi}{4}$ として $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \Delta$ の時

$$\left|\frac{z^2}{z^2+t^2}\right| \leq K_z \qquad \text{with} \quad K_z = \left(\frac{1}{\sin 2\Delta}\right) \qquad \text{for} \quad \Re z > 0$$

$|\arg z| \leq \pi/4$ の時は $K_z = 1$ ととれる。

$|q(t, z+n)|$ の評価へ戻って $\Re e\, z > 0$ の時、n を十分大きくとると $|\arg(z+n)| \leq \frac{\pi}{4}$ と出来るから $K_z = 1$ ととれる。そこで ${}^\exists N$

$$|q(t,z)| \leq 2\frac{t}{|z+n|^3} \qquad \text{for} \quad {}^\forall n > N$$

より

$$\left|\int_0^\infty \frac{q(t,z+n)}{e^{2\pi t}-1}dt\right| \leq \frac{2}{|z+n|^3}\int_0^\infty \frac{t}{e^{2\pi t}-1}dt = \frac{2}{(z+n)^3}\frac{B_1}{4} \to 0 \qquad \text{for} \quad n \to \infty$$

$q(t,z) = (-2)zt/(z^2+t^2)^2$ を代入すると、結局

$$\frac{d^2}{dz^2}\log\Gamma(z) = \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z} + \int_0^\infty \frac{4zt}{(z^2+t^2)^2}\left(\frac{1}{e^{2\pi t}-1}\right)dt \qquad \text{for} \quad \Re e\, z > 0$$

右辺の積分は分子にも t があるから $t=0$ における振る舞いは singular でない。つまり、$\Re e\, z > 0$ で絶対一様収束である。そこで、積分内で z の積分が出来て $(1 \sim z)$

$$\frac{d}{dz}\log\Gamma(z) = -\frac{1}{2z} + \log z + C - 2\int_0^\infty \frac{t}{z^2+t^2}\frac{1}{e^{2\pi t}-1}dt$$

実際

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{z^2+t^2} = -\frac{2z}{(z^2+t^2)^2}$$

C は積分定数である。ふたたび絶対一様収束より、$1 \sim z$ まで積分して

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z + (C-1)z + C' + 2\int_0^\infty \frac{\arctan\left(\frac{t}{z}\right)}{e^{2\pi t}-1}dt$$

実際

$$\begin{aligned}
&\text{右辺 1 − 2 項目の微分} = -\frac{1}{2z} + \log z + C \\
&\theta = \arctan x \qquad \tan\theta = x \qquad \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + x^2 \\
&\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{より} \\
&\frac{\partial}{\partial z}\arctan\left(\frac{t}{z}\right) = -\frac{t}{z^2+t^2} \qquad \text{より O.K.}
\end{aligned}$$

　次に、C と C' の係数を決定するために、最後の積分が $|z| \to \infty$ で 0 となる事を示す。もし、$z = x = \text{real}$ なら $\Re e\, z > 0$ より $x > 0,\, t/x > 0$ より

$$0 \le \arctan\left(\frac{t}{x}\right) \le \frac{t}{x}$$

を用いて

$$\left|2\int_0^\infty \frac{\arctan\left(\frac{t}{x}\right)}{e^{2\pi t}-1}dt\right| \le \frac{2}{x}\int_0^\infty \frac{t}{e^{2\pi t}-1}dt = \frac{2}{x}\frac{B_1}{4} \to 0 \qquad \text{as} \quad x \to \infty$$

そこで $x > 0$ の時

$$\left|\log\Gamma(x) - \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - (C-1)x - C'\right| \le \frac{1}{x}\frac{B_1}{2} \to 0 \qquad \text{as} \quad x \to \infty$$

そこで

$$J(z) = 2\int_0^\infty \frac{\arctan\left(\frac{t}{z}\right)}{e^{2\pi t}-1}dt$$

とおいて

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z + (C-1)z + C' + J(z)$$

と書くと

$$J(x) \to 0 \qquad \text{for} \qquad z = x = \text{real} \to \infty$$

まず

$$\log\Gamma(x+1) = \log\{x\Gamma(x)\} = \log x + \log\Gamma(x)$$

より

$$\begin{aligned}&\left(x+\frac{1}{2}\right)\log(x+1) + (C-1)(x+1) + C' + J(x+1)\\ &= \log x + \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x + (C-1)x + C' + J(x)\end{aligned}$$

つまり

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right) + C - 1 = J(x) - J(x+1)$$

ここで、$x \to \infty$ として

$$\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\log(1+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1+\varepsilon} = 1$$

そこで C=0。

次に、$C' = \frac{1}{2}\log(2\pi)$ を示す。そのために、まず $z = x = \text{real}$ を一般化して

$$J(z) \to 0 \qquad \text{for} \qquad |z| \to \infty$$

を示す必要がある。そのためには $\arctan z$ の展開が必要であるが、今それを仮定して前へ進む。

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$$

で $z = \frac{1}{2} + iy$ とすると $\sin\pi(1/2+iy) = \cos(-i\pi y) = \cosh(\pi y)$ より

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-iy\right) = \frac{\pi}{\cosh(\pi y)}$$

そこで log をとり

$$\log\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)+\log\Gamma\left(\frac{1}{2}-iy\right)=\log\pi-\log\cosh\left(\pi y\right)$$

に

$$\log\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z-z+C'+J(z)$$

を適用すると

$$\begin{aligned}&iy\log\left(\frac{1}{2}+iy\right)-\left(\frac{1}{2}+iy\right)+C'+J\left(\frac{1}{2}+iy\right)\\&-iy\log\left(\frac{1}{2}-iy\right)-\left(\frac{1}{2}-iy\right)+C'+J\left(\frac{1}{2}-iy\right)\\&=\log\pi-\log\cosh\left(\pi y\right)\end{aligned}$$

つまり

$$\begin{aligned}2C' &= 1+\log\pi-iy\log\frac{1+2iy}{1-2iy}-\log\cosh\left(\pi y\right)\\&\quad-\left[J\left(\frac{1}{2}+iy\right)+J\left(\frac{1}{2}-iy\right)\right]\end{aligned}$$

ここで $y\to\infty$ とすると、仮定により 2 行目 $\to 0$

$$\begin{aligned}&-iy\log\frac{1+2iy}{1-2iy}=-iy\log\left\{(-1)\frac{1+\frac{1}{2iy}}{1-\frac{1}{2iy}}\right\}\\&=-iy\left\{i\pi+\log\frac{1+\frac{1}{2iy}}{1-\frac{1}{2iy}}\right\}\qquad\text{(主値をとる)}\\&=-iy\left\{i\pi+\log\left(1+\frac{1}{iy}\right)+O\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}=-iy\left\{i\pi+\frac{1}{iy}+O\left(\frac{1}{y^2}\right)\right\}\\&=\pi y-1+O\left(\frac{1}{y}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-\log\cosh\left(\pi y\right)=-\log\frac{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}{2}=-\log e^{\pi y}\frac{1-e^{-2\pi y}}{2}\\&=-\pi y+\log 2-\log\left(1-e^{-2\pi y}\right)=-\pi y+\log 2-O\left(e^{-2\pi y}\right)\end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned}2C' &= 1+\log\pi+\pi y-1+O\left(\frac{1}{y}\right)-\pi y+\log 2-O\left(e^{-2\pi y}\right)\\&= \log(2\pi)\end{aligned}$$

結局、$C' = (1/2)\log(2\pi)$

　まとめると

$$\log\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) + J(z)$$
$$\text{with} \qquad J(z) = 2\int_0^\infty \frac{\arctan\left(\frac{t}{z}\right)}{e^{2\pi t}-1}dt \qquad (\Re e\, z > 0) \qquad (\text{Binet の第 2 公式})$$

$z = x = \text{real} > 0$ の時

$$|J(x)| \leq \frac{B_1}{2x} = \frac{1}{12x}$$

上の公式から

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}e^{-z}z^{z-\frac{1}{2}}e^{J(z)} \qquad (\Re e\, z > 0)$$

を得る。

　(注意) $J(z) \to 0$ ($|z| \to \infty$) の証明は、次の漸近展開の応用例として Stirling series のところで示す。

3.4 漸近展開

3.4.1 定義と性質

　発散級数

$$A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \cdots + \frac{A_n}{z^n} + \cdots$$

が、或る $\arg z$ の範囲で $f(z)$ の漸近展開 (asymptotic expansion) であるとは

$$\begin{aligned} S_n(z) &= A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \cdots + \frac{A_n}{z^n} \\ R_n(z) &= z^n\left[f(z) - S_n(z)\right] \end{aligned}$$

として

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(z)| = \infty \qquad (z \text{ fixed})$$

だが

$$\lim_{|z|\to\infty} R_n(z) = 0 \qquad (n \text{ fixed})$$

を満たす事である。この時、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $|z|$ を十分大きくとりさえすれば

$$| \ z^n \left[f(z) - S_n(z) \right] \ | < \varepsilon$$

とでき、それを

$$f(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(\frac{1}{z} \right)^m$$

と書く。(Poincaré の漸近展開)

(例) $x > 0$ の時

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^\infty \frac{1}{t} e^{x-t} dt \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2\,!}{x^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)\,!}{x^n} + (-1)^n n\,! \int_x^\infty \frac{1}{t^{n+1}} e^{x-t} dt \end{aligned}$$

を考える。実際、

$$I_n = \int_x^\infty \frac{1}{t^n} e^{x-t} dt$$

として、部分積分すると

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{t^n} \left(-e^{x-t} \right) \Big|_x^\infty - \int_x^\infty \left(-\frac{n}{t^{(n+1)}} \right) \left(-e^{x-t} \right) dt \\ &= \frac{1}{x^n} - n \int_x^\infty \frac{1}{t^{n+1}} e^{x-t} dt = \frac{1}{x^n} - n I_{n+1} \qquad (n = 1,\ 2,\ \cdots) \end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned} f(x) &= I_1 = \frac{1}{x} - I_2 = \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - 2 I_3 \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 2 \left(\frac{1}{x^3} - 3 I_4 \right) = \cdots \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2\,!}{x^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)\,!}{x^n} + (-1)^n n\,! \int_x^\infty \frac{1}{t^{n+1}} e^{x-t} dt \end{aligned}$$

一般項を

$$u_{n-1}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)\,!}{x^n}$$

として

$$S_n(x) = \sum_{m=0}^{n} u_m(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2\,!}{x^3} - \cdots + (-1)^n \frac{n\,!}{x^{n+1}}$$

とする。

$$\left| \frac{u_m(x)}{u_{m-1}(x)} \right| = \frac{m}{x} \to \infty \qquad \text{as} \quad m \to \infty$$

つまり、$\sum_{m=0}^{\infty} u_m(x)$ は全ての $x > 0$ に対して発散。

$$R_n(x) = x^n \left[f(x) - S_n(x)\right] = x^n (-1)^{n+1} (n+1)\,! \int_x^{\infty} \frac{1}{t^{n+2}} e^{x-t} dt$$

とすると、$t > x$ に対して $|e^{x-t}| < 1$ より

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq x^n (n+1)\,! \int_x^{\infty} \frac{1}{t^{n+2}} dt = x^n (n+1)\,! \left[-\frac{1}{n+1}\frac{1}{t^{n+1}}\right]_x^{\infty} \\ &= x^n (n+1)\,! \frac{1}{n+1}\frac{1}{x^{n+1}} = \frac{n\,!}{x} \to 0 \qquad \text{as} \quad x \to \infty \end{aligned}$$

x が十分大きい時

$$|f(x) - S_n(x)| = \frac{1}{|x|^n} |R_n(x)|$$

はいくらでも小さく出来る。実際、もし $x \geq 2n$ とすると

$$\begin{aligned} &\frac{n\,!}{x^{n+1}} \leq \frac{n\,!}{(2n)^{n+1}} = \frac{n\,!}{2^{n+1} n^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1} n^2} \frac{n\,!}{n^{n-1}} \\ &\frac{n\,!}{n^{n-1}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot n \cdot n \cdot \cdots n} \leq 1 \qquad (n = 2,\ 3,\ \cdots) \end{aligned}$$

そこで

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n+1} n^2}$$

つまり、n を十分大きくとると、$x \geq 2n$ に対して $f(x)$ と $S_n(x)$ の差をいくらでも小さく出来る。

[asymptotic expansion の性質]

○ 2 つの asymptotic expansion の積は、また asymptotic expansion

$$f(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(\frac{1}{z}\right)^m \quad , \qquad g(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} B_m \left(\frac{1}{z}\right)^m$$

の時、最初の $(n+1)$ term の和をそれぞれ $S_n(x), T_n(x)$ とすると

$$f(z) = S_n(z) + o\left(\left(\frac{1}{z}\right)^n\right) \quad , \qquad g(z) = T_n(z) + o\left(\left(\frac{1}{z}\right)^n\right)$$

そこで

$$\begin{aligned} f(z)g(z) &= \left[S_n(z) + o\left(\left(\frac{1}{z}\right)^n\right)\right]\left[T_n(z) + o\left(\left(\frac{1}{z}\right)^n\right)\right] \\ &= S_n(z)T_n(z) + o\left(\left(\frac{1}{z}\right)^n\right) = \sum_{m=0}^{n} C_m \left(\frac{1}{z}\right)^m + o\left(\left(\frac{1}{z}\right)^n\right) \end{aligned}$$

ここに

$$C_m = A_0 B_m + A_1 B_{m-1} + \cdots + A_m B_0$$

つまり

$$f(z)g(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left(\frac{1}{z}\right)^m$$

○ 項別積分可能

$$f(x) \sim \sum_{m=2}^{\infty} A_m \left(\frac{1}{x}\right)^m \quad , \qquad S_n(x) = \sum_{m=2}^{n} A_m \left(\frac{1}{x}\right)^m \qquad (x = \text{real} > 0 \text{ とする})$$

とすると

$$\begin{aligned}
&{}^{\forall}\varepsilon > 0 \qquad {}^{\exists}x_0 > 0 \\
&x > x_0 \text{ に対して} \qquad |f(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{x^n}
\end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned}
&\left|\int_x^{\infty} f(x)dx - \int_x^{\infty} S_n(x)dx\right| \leq \int_x^{\infty} |f(x) - S_n(x)|\, dx \\
&\leq \varepsilon \int_x^{\infty} \frac{dx}{x^n} = \varepsilon \left(-\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}\right)_x^{\infty} = \varepsilon \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}
\end{aligned}$$

ところで

$$\begin{aligned}
&\int_x^{\infty} S_n(x)dx = \sum_{m=2}^{n} A_m \int_x^{\infty} \frac{dx}{x^m} \\
&= \sum_{m=2}^{n} A_m \left[-\frac{1}{m-1}\frac{1}{x^{m-1}}\right]_x^{\infty} = \sum_{m=2}^{n} A_m \frac{1}{(m-1)x^{m-1}}
\end{aligned}$$

そこで

$$\int_x^{\infty} f(x)dx \sim \sum_{m=2}^{\infty} \frac{A_m}{m-1} \left(\frac{1}{x}\right)^{m-1}$$

(注意) 項別微分はダメ。

○ asymptotic expansion の一意性

1 つの asymptotic expansion が 2 つの異なる函数の asymptotic expansion であることはありうる。実際、$L(x) = e^{-x}$ とすると

$$\lim_{x \to \infty} x^n e^{-x} = 0 \qquad \text{for fixed } n$$

そこで $J(x)$ の asymptotic expansion は $J(x)+L(x)$ の asymptotic expansion でもあり得る。

他方、1 つの函数が 2 つの異なる asymptotic expansion を持つ事はあり得ない。実際

$$f(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left(\frac{1}{z}\right)^m \quad , \qquad f(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} B_m \left(\frac{1}{z}\right)^m$$

$(n+1)$ 項までの和をそれぞれ $S_n(x)$, $T_n(x)$ とすると

$$\lim_{|z|\to\infty} z^n \left[f(z) - S_n(z)\right] = 0 \quad , \qquad \lim_{|z|\to\infty} z^n \left[f(z) - T_n(z)\right] = 0$$

より

$$\lim_{|z|\to\infty} z^n \left[S_n(z) - T_n(z)\right] = 0$$

つまり

$$\begin{aligned} &\lim_{|z|\to\infty} z^n \left\{A_0 + \frac{A_1}{z} + \cdots + \frac{A_n}{z^n} - B_0 - \frac{B_1}{z} - \cdots - \frac{B_n}{z^n}\right\} \\ &\lim_{|z|\to\infty} \left\{(A_0 - B_0)z^n + (A_1 - B_1)z^{n-1} + \cdots + (A_n - B_n)\right\} = 0 \end{aligned}$$

より、次々に

$$A_0 = B_0 \quad , \qquad A_1 = B_1 \quad , \cdots \qquad , \qquad A_n = B_n$$

3.4.2 Stirling's series

Γ-函数の対数の漸近展開を Stirling's series という。3.3.5 節から $\Re e\, z > 0$ に対して

$$\begin{aligned} &\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + J(z) \\ &\text{with} \qquad J(z) = 2\int_0^\infty \frac{\arctan\left(\frac{t}{z}\right)}{e^{2\pi t} - 1} dt \end{aligned}$$

ここでは、$J(z)$ の漸近展開を考える。

○ arctangent の展開

$x = \tan\theta$ の逆函数

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

で

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1-(-t^2)^n}{1-(-t^2)} + \frac{(-t^2)^n}{1-(-t^2)} = \sum_{r=0}^{n-1}(-t^2)^r + (-1)^n\frac{t^{2n}}{1+t^2}$$

と展開すると

$$\int_0^x (-t^2)^r dt = (-1)^r\int_0^x t^{2r}dt = (-1)^r\frac{t^{2r+1}}{2r+1}\bigg|_0^x = (-1)^r\frac{x^{2r+1}}{2r+1} \qquad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

より

$$\arctan x = \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\frac{1}{2r+1}x^{2r+1} + (-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt$$

$|x|<1$ の時、$|x|<\delta<1$ とすると

$$\left|\int_0^x\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt\right| = \int_0^{|x|}\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt \le \delta^{2n}\int_0^\infty\frac{1}{1+t^2}dt = \delta^{2n}\frac{\pi}{2}\to 0 \qquad \text{as}\quad n\to\infty$$

そこで

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad \text{for} \qquad |x|<1$$

$|x|<1$ の時、絶対一様収束。$x=1$ の時は条件収束で

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

○ 上の公式で $x\to t/z$ とすると

$$\arctan\frac{t}{z} = \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\frac{1}{2r+1}\left(\frac{t}{z}\right)^{2r+1} + (-1)^n\int_0^{\frac{t}{z}}\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$$

最後の積分で $x=u/z$ として

$$(-1)^n\int_0^t\frac{\left(\frac{u}{z}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{u}{z}\right)^2}\frac{1}{z}du = (-1)^n\frac{1}{z^{2n-1}}\int_0^t\frac{u^{2n}}{z^2+u^2}du$$

そこで $J(z)$ において

$$\arctan\frac{t}{z} = \sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}\frac{1}{2m-1}\left(\frac{t}{z}\right)^{2m-1} + (-1)^n\frac{1}{z^{2n-1}}\int_0^t\frac{u^{2n}}{z^2+u^2}du$$

を使って、更に

$$\int_0^\infty\frac{t^{2m-1}}{e^{2\pi t}-1}dt = \frac{B_m}{4m}$$

を使うと

$$
\begin{aligned}
J(z) = &\sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \frac{B_m}{2m(2m-1)} \left(\frac{1}{z}\right)^{2m-1} \\
&+(-1)^n \frac{2}{z^{2n-1}} \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \frac{u^{2n}}{z^2+u^2} du \right\} \frac{1}{e^{2\pi t}-1} dt
\end{aligned}
$$

ここで、2 行目の剰余項を estimate する。3.3.5 にならって $0 < \Delta < \pi/4$　として $|\arg z| \le \pi/2 - \Delta$, $\Re e\, z > 0$ とすると

$$
\left| \frac{z^2}{z^2+u^2} \right| \le K_z \qquad \text{with} \qquad K_z = \left(\frac{1}{\sin 2\Delta} \right)
$$

$|\arg z| \le \pi/4$ の時は $K_z = 1$ ととれる。そこで

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \frac{u^{2n}}{z^2+u^2} du \right\} \frac{1}{e^{2\pi t}-1} dt \right| \\
&\le K_z \frac{1}{|z|^2} \int_0^\infty \left\{ \int_0^t u^{2n} du \right\} \frac{1}{e^{2\pi t}-1} dt \\
&= K_z \frac{1}{|z|^2} \frac{1}{2n+1} \int_0^\infty \frac{t^{2n+1}}{e^{2\pi t}-1} dt = \frac{K_z B_{n+1}}{4(n+1)(2n+1)|z|^2}
\end{aligned}
$$

結局

$$
\begin{aligned}
&\left| (-1)^n \frac{2}{z^{2n-1}} \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \frac{u^{2n}}{z^2+u^2} du \right\} \frac{1}{e^{2\pi t}-1} dt \right| \\
&\le \frac{K_z B_{n+1}}{2(n+1)(2n+1)|z|^{(2n+1)}}
\end{aligned}
$$

つまり

$$
\begin{aligned}
&\left| z^{2n-1} \left[J(z) - \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \frac{B_m}{2m(2m-1)} \left(\frac{1}{z}\right)^{2m-1} \right] \right| \\
&\le \frac{K_z B_{n+1}}{2(n+1)(2n+1)|z|^2} \to 0 \qquad \text{as} \quad |z| \to \infty
\end{aligned}
$$

$|\arg z| \le \pi/2 - \Delta$ の時、z の偏角について一様に $|z| \to \infty$ の時 0 に近づく。ここに $K_z = (1/\sin 2\Delta)$ or 1。特に、$|\arg z| \le \pi/4$ なら $K_z = 1$ ととれるので

$$
\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{B_m}{2m(2m-1)} \left(\frac{1}{z}\right)^{2m-1}
$$

の最初の n 項をとった時の誤差は $(n+1)$ 項の寄与

$$
(-1)^n \frac{B_{n+1}}{2(n+1)(2n+1)} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}
$$

の絶対値より小さい。故に

$$J(z) \sim \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{B_m}{2m(2m-1)}\left(\frac{1}{z}\right)^{2m-1}$$
$$= \frac{B_1}{1\cdot 2}\frac{1}{z} - \frac{B_2}{3\cdot 4}\left(\frac{1}{z}\right)^3 + \frac{B_3}{5\cdot 6}\left(\frac{1}{z}\right)^5 - \cdots$$

は asymptotic expansion である。

まとめると

$$\log\Gamma(z) \sim \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{B_m}{2m(2m-1)}\left(\frac{1}{z}\right)^{2m-1}$$
$$\text{for} \quad \Re e\, z > 0 \ , \quad |\arg z| \le \frac{\pi}{2} - \Delta \quad \left(0 < \Delta < \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{(Stirling's series)}$$

特に $z = x > 0$ (real and positive) の時、$J(x)$ は常に n 項と $n+1$ 項までの和の間にある。そこで、特に $n = 0$ ととって

$$0 < J(x) < \frac{B_1}{1\cdot 2x} = \frac{1}{12x} \qquad \left(B_1 = \frac{1}{6}\right)$$

そこで

$$J(x) = \frac{\theta}{12x} \qquad \text{with} \qquad 0 < \theta < 1$$

で

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}e^{-x}x^{x-\frac{1}{2}}e^{\frac{\theta}{12x}}$$

あるいは

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}e^{-x}x^{x-\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \cdots\right\}$$

おわり (H14.6.2)