現代の物質観その 6
Modern view on the constituents of matter VI.
電磁気学の発展 - ファラデーからマックスウェルへ -

Fujiwara Yoshikazu

2023 年 2 月 13 日

目次

1 はじめに

今回は、ファラデーに始まってマックスウェルによって数学的に定式化され、アインシュタインの特殊相対性理論において完成した電磁気学の基礎について学ぶ。琥珀を擦ることによって生じる力や磁石がある特定の金属を引きつける力が存在することは古代エジプトやギリシャにおいて既に知られていたようであるが、これらの力が万有引力と同じく近似的に距離の二乗に反比例することは、1700 年代の終わり頃、イギリスのキャベンディッシュやフランスのシャルル・ド・クーロンによって発見された。これらはクーロンの法則として静電磁気学の基礎となっている。しかし、現代の電磁気学の大きな発展は、1820 年にオランダの物理学者エルステッドが電流の周りに発生した磁場を発見したことから始まった。たちまちのうちに、ビオサバールの法則やアンペールの法則が発見され、それをファラデーが知ることとなった。ファラデーの最大の功績は、その逆の現象、すなわち磁場の変化が電位差を生むという電磁誘導という現象を発見したことである。これにより、マックスウェルによって四つの方程式が完全に整備されて、それらが電荷の無い真空においても non trivial な解を持つことから電磁波の存在が示された。これは、ドイツの物理学者ハインリヒ・ヘルツによって実験的に確かめられた。しかし、彼は電磁波の将来的重要性には気付かず、電磁波を用いてモールス信号による無線通信の道を開いたのはイタリアの発明家グリエルモ・マルコーニである。1800 年代の終りのことであった。それ以来、第一次・第二次世界大戦を経てラジオ放送の開始、レーダーの開発、テレビ放送の開始等、良きにつけ悪しきにつけ現代の IT 産業に繋がる電磁波の応用が始まることになる。

電磁波を使った技術的発展の歴史はさておき、我々の自然認識の面で重要なのは、光が電磁波の一種であるという事実である。波長領域の違いによる電磁波の分類については、あとで光と電磁波の節で詳説するが、一般に電磁波は波と粒子の双方の特性を併せ持つ。波長が短い方が粒子的性格が強い。これにより、微視の世界の基本法則である量子力学の発展に伴って電磁力が原子・分子レベルでの基本的な力であることが明らかになると同時に、物質と電磁波との密接な関係が判明した。その後、原子核や素粒子といった所謂 subatomic physics の分野で (subatomic とは原子以下のレベルという意味である) 次々に発見された強い相互作用や弱い相互作用においても、電磁相互作用の理論体系は、それを拡張した形で成り立っていることが明らかになり、この講義の目指す「標準模型」を形成することとなる。この流れの中で、ファラデーの果たした役割は計り知れないものがある。彼は力の働く「場 (field)」という概念を生み出した。それを説明する為には、まず遠

隔相互作用と近接相互作用という基本的概念を理解する必要がある。

1.1 遠隔相互作用と近接相互作用、古典場の理論

ニュートンの時代には力とは面と面とが直接接触することによって働くという考え方が一般的であって、万有引力の法則のように空間的に離れた二つの質点に瞬時に働く力 - これを遠隔相互作用という - は考えにくいものであった。ニュートンの第 3 法則も二つの接触面については考え易いが、彼は万有引力についてもこれが成り立つと考えたのである。実際、ニュートンは当時の多くの科学者によって批判されたが、彼は「我は仮説を作らず」と言って、これを仮説とは考えなかった。彼自身もその問題に気付いていたが、彼はその法則を法則として受け入れることで納得したようである。一方ファラデーは、電荷の存在する空間が独自の性格をおび、そこにまた別の荷電粒子を置くことにより力を受けると考える。このような力を近接相互作用という。例えば、クーロンの法則は電荷 Q と q を帯びた二つの粒子が距離 r だけ離れた時

$$F = k\frac{qQ}{r^2} \quad , \quad F = \frac{qQ}{r^2} \tag{1.1.1}$$

という法則で力を及ぼし合うことが知られている。電荷 (或いは電気量) とは何かという問題は、我々の自然認識の中で長い発展の歴史を持つが、ここでは一応質点とみなし得る粒子が質量とはまた別の電気的性質を帯びていると考えておこう。電荷にはプラス (+) とマイナス (−) が存在する。結合定数 k は、電荷の単位によるが、それを ± 1 とするような単位を選ぶと便利である。これを cgs-esu (electro-static unit) 単位系 (cgs 静電単位系) という。$F > 0$ の時斥力、$F < 0$ の時引力である。今簡単のために、電荷 Q を持つ粒子は座標原点に、電荷 q を持つ粒子は座標ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表される点 P に位置すると考えよう。この時 Q のまわりに電場 (電界ともいう)

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{1.1.2}$$

が発生したと考える。ここに $\boldsymbol{e}_r$ は、極座標系における動径方向の単位ベクトルである。$\boldsymbol{E}$ は、勿論座標 $\boldsymbol{r}$ に依存する: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$. $\boldsymbol{r}$ の位置にある電荷 q は電場 $\boldsymbol{E}$ から

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{1.1.3}$$

の力を受ける。q が Q と符号が同じ時には $\boldsymbol{F}$ は動径方向を向き、違う時には中心方向を向く。即ちこれがクーロン斥力と引力である。実際には q が Q に及ぼす効果を考えなくてはいけないので、それが無視できる $q \ll Q$ の時に Q の近傍においてしか成り立た

ないが、それでも十分近接相互作用の特徴を表している。ファラデーは、持ち前の直感力から図 1 のように座標原点から放射状に伸びたベクトルで電場を表した。ベクトルの大きさは、電場の強さに対応する。これを電気力線という。ベクトルの大きさは、電場の強さに対応し、電気力線が混み合っているところほど電場の強さは大きい。磁場についても (1.1.1) に類似の関係式 (磁気に関するクーロンの法則) が成り立つが、この場合には磁石を二つに分けるとかならずその両端に N 極と S 極という同量の磁気量が現れるという特殊事情が存在する。それでも、磁石の上にガラス板を置きその上に砂鉄を撒くことで図 2 の様に磁力線を可視化することが出来る。磁場 (磁界ともいう) $\boldsymbol{H}$ において、磁気量 m を持つ質点の受ける力は $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{H}$ である。

図 1: 電荷 Q のまわりの電気力線

図 2: 磁石の作る磁力線

近接相互作用には、しかしながら基本的な問題がある。上の Q の作る電場に反応する電荷 q を持つ粒子について言えば、これは例えば大きな客船が大海原を進む際に、海面に生じた波が次々に新しい波を作り、それが暫く経って小舟に到達し、小舟が、それが揺れるのに似ている。この時力を伝える媒体は海水であって、その波の速度は水の粘性率のみならず海底の深さや付近の海岸線の形にも依存している。また別の例は、音波の伝播である。音は空気の振動が一定の音速で伝わるものであり、空気の存在しない真空では音は伝わらない。また音速は空気の温度や圧縮率に関係しており、その理論は複雑である。それでは、電磁波を伝える媒体は何であろうか？ この問題は、多くの物理学者を長期にわたって悩まし続けた。人々は、それをエーテルと呼んだが、その性質は調べれば調べるほど複雑怪奇なものであった。その解決は、意外なところから得られることになる。マイケルソン・モーリーによって見い出された光の速度は、どんな慣性系から見ても、常に一定であるという実験的事実と、そこから導かれたアインシュタインの特殊相対性理論である。結論から先に言えば、電場等は、真空がそれ自身の性格として帯びる物理的実体であって、エーテルなどというものは存在しない。また万有引力についても、その本質はアインシュタインの一般相対性理論によって非ユークリッド幾何学計量 (メトリック) の性質として理解されることが判明した。

ニュートンの運動方程式 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ で、一般に力 $\boldsymbol{F}$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ だけでなく、速度 $\boldsymbol{v}$, 時間 t 等の函数である: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)$. 今、$\boldsymbol{F}$ が $\boldsymbol{r}$ だけの函数のとき、$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を「力の場」という。一般に、空間の各点 P にベクトルが与えられたとき、そのベクトルの総体を「ベクトル場」という。同様に、空間の各点 P にスカラー量が与えられたとき、そのスカラーの総体を「スカラー場」という

ベクトル場 : $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}),\ \cdots$ (力の場、電場、磁場、$\cdots$)
スカラー場 : $U(\boldsymbol{r}),\ \varphi(\boldsymbol{r}),\ \cdots$ (位置ポテンシャル、電磁場のポテンシャル、$\cdots$)

場は力の性格に関係しており、力は相互作用とほぼ同意義に用いられる。微視の世界では場も「量子化」され、それを第二量子化と呼んでいる。電磁場の場合、その時に現れる粒子が光子である。これに対応して、上の様な場を古典的な場とか「古典場」と呼んでいる。クーロン電荷の作る静的クーロン場は、万有引力の法則と同じ $\frac{1}{r^2}$ の力であるから保存力である。従って万有引力ポテンシャルの時と同じように、スカラーポテンシャルの gradient で表される。座標原点に静電荷 Q がある上の例では $V = \frac{Q}{r}$ を静電ポテンシャルとして、電場 $\boldsymbol{E}$ は $(\boldsymbol{\nabla} r) = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{e}_r$ を用いて

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V = -(\boldsymbol{\nabla} r)\frac{\partial}{\partial r}\frac{Q}{r} = \frac{Q}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{1.1.4}$$

と書ける。電荷 q の受ける力は $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}(qV)$ より $U = qV$ が静電場の位置エネルギー (ポテンシャルエネルギー) である。古典場の理論では、しばしば流体力学で使われる記述との類推が有用である。例えば、電荷 Q から電気力線が流れ出ていると考えると、電場には後で述べるベクトル解析におけるガウスの定理が成り立つ。電場のベクトル $\boldsymbol{E}$ を (非圧縮的) 流体の流速ベクトルの様に考えて、原点を半径 R の球面で囲みその球面から流れ出る流量を計算すると、$Q/R^2 \cdot 4\pi R^2 = 4\pi Q$ となる。半径 R は任意なので、それを十分小さくとると、この流量は原点から流れ出ている (湧き出ている) ことが分かる。ここでは簡単の為、原点の周りの球面を仮定したが、実は原点を含む任意の閉じた曲面 S についてこれは成り立つ。次の章で導入するベクトル解析の言葉では、これは

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi Q \tag{1.1.5}$$

と表される。左辺の積分は、次章で説明する面積分である。もし 3 次元空間における閉じた曲面が原点を含まなければ、右辺は 0 である。この場合は、曲面に流れ込む流量は、曲面から流れ出す流量に等しく、差し引き 0 であることを表わす。既に述べたように、磁場の場合は単独の磁極 (これを単磁子 - モノポール - という) は存在しないので、常に

$$\int_S \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{1.1.6}$$

が成り立つ。

2　ベクトル解析の初歩

ここでは Maxwell 方程式を理解するのに必要な最低限の範囲で、ベクトル解析の初歩について解説する。簡単な導出方は、例えばカンパニェーツ著の「理論物理学」の電気力学のところを参照されたい。

2.1　面積分、ガウスの定理

3 次元空間における曲面の微少面積を表すベクトルを $d\boldsymbol{S}$ とする。このベクトルの向きは微少曲面の法線方向 $\boldsymbol{n}$ を向いており、その大きさは微少面積 dS を表す。つまり $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS$ である。法線方向は、一つの微少面積に対して二つあるが、単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ は、面に対して右ネジの方向にとると約束する。この時、電場 $\boldsymbol{E}$ との内積 $\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}$ を全曲面 S について積分したものを面積分と言って $\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}$ で表す。全曲面 S は、3 次元空間の中で開いた場合も閉じた場合もある。閉じた場合は $\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}$ と書く場合もある。特に閉じた曲面についての面積分に関して、次のガウスの定理が成り立つ。

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{E}dV \tag{2.1.1}$$

ここに、右辺は閉じた曲面 S に囲まれた体積 V についての体積積分であり、$\mathrm{div}\boldsymbol{E}$ は電場 $\boldsymbol{E}$ の発散と言い直交座標系では

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{2.1.2}$$

と表される。直交座標系では x-y 平面の微少面積要素は $dS = dxdy$、法線方向の単位ベクトルは $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_z$、微少体積要素は $dV = dxdydz$ である。一方 (1.1.5) の右辺を電荷密度 ρ をもちいて表すと

$$4\pi Q = 4\pi\int_V \rho dV \tag{2.1.3}$$

より、ガウスの定理とあわせると

$$\int_V (\mathrm{div}\boldsymbol{E} - 4\pi\rho)dV = 0 \tag{2.1.4}$$

が任意の閉曲面に囲まれた体積 V について成り立つ。ここに、V は任意だから

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho \tag{2.1.5}$$

が成り立つ。磁場に対しては (1.1.6) から

$$\mathrm{div}\boldsymbol{H} = 0 \tag{2.1.6}$$

が成り立つ。

原点に存在する点電荷 Q に対しては、ディラックのデルタ函数 $\delta(\boldsymbol{r})$ を用いて

$$\rho = Q\delta(\boldsymbol{r}) \tag{2.1.7}$$

と表すのが便利である。ここに $\delta(\boldsymbol{r})$ は、$\boldsymbol{r} = 0$ 以外では 0、$\boldsymbol{r} = 0$ では無限大で $\int \delta(\boldsymbol{r})dV = 1$ を満たすものである。ここに積分領域は全空間についてとるものとする。厳密には $\delta(\boldsymbol{r})$ は Shwartz の意味での超函数で、任意の滑らかな函数 $f(\boldsymbol{r})$ に対して

$$\int f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r})dV = f(0) \tag{2.1.8}$$

を満たすものである。(1.1.4) を (2.1.1) に代入してラプラシアン $\Delta = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2$ を用いると (一定の Q を除いて)

$$\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}) \tag{2.1.9}$$

が得られる。もっと一般的には、時間に依存しない静電荷分布 $\rho(\boldsymbol{r})$ に対しては、静電場は静電ポテンシャル $\varphi(\boldsymbol{r})$ に対するポアソン方程式

$$\Delta\varphi(\boldsymbol{r}) = -4\pi\rho(\boldsymbol{r}) \tag{2.1.10}$$

を解くことにより、$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$ から計算することができる。(2.1.9) より

$$\Delta(1/|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}|) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}) \tag{2.1.11}$$

が成り立つので、(2.1.10) の解は一般に

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}|}d\boldsymbol{a} \tag{2.1.12}$$

と表される。ここに $d\boldsymbol{a}$ の積分は $\boldsymbol{a}$ についての全空間積分を表す。

追記: ガウスの定理の証明

体積 V を内接する微少長方体 ΔV に細分して、それぞれに対してガウスの定理が成り立つことをまず示す。ΔV は図 3 の様にその一つの頂点が (x, y, z) にあり、x-軸、y-

軸、z-軸方向の長さがそれぞれ dx、dy、dz の長方体である。$y+dy$ にある z-x 平面内の微少面積要素 $dzdx$ を流れ出る電場の分量は $E_y(x,y+dy,z)dzdx$、y にある面積要素 $dzdx$ に流れ込む分量は $E_y(x,y,z)dzdx$ である事より、差し引き

$$E_y(x,y+dy,z)dzdx - E_y(x,y,z)dzdx = \frac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial y}dydzdx \tag{2.1.13}$$

となる。x,y,z を cyclic に回して、x-y 平面、y-z 平面の寄与も足しあげると、$dV = dxdydz$ として

$$\oint_{\partial\Delta V} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_{\Delta V} \mathrm{div}\boldsymbol{E}\ dV \tag{2.1.14}$$

が得られる。ここに $\partial\Delta V$ は微少長方体の表面を表す。(2.1.14) を全ての微少長方体について足しあげることにより、(2.1.1) が得られる。微少長方体の隣り合う面の寄与は互いに打ち消しあう。(証明終り)

図 3: ガウスの定理の証明、微少長方体

2.2　線積分、ストークスの定理

線積分は既に力のする仕事のところで説明した。電場 $\boldsymbol{E}$ の中で電荷 q を持つ粒子をある曲線 C に沿って動かすと、電場は粒子に対して $\int_C q\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$ だけ仕事をする。これを $q\Omega$ と書いて $\Omega = \int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$ を起電力 (電位、あるいは電圧ともいう) という。3 次元空間内で曲線 C が閉じていなくて点 P から始まり点 Q で終わる時、これは P と Q の間の電位差 (電気的位置エネルギーの差) である。曲線 C が閉じている時、曲線 C に沿っての線積分は、曲線 C によって囲まれた曲面 S についての面積分で表される。即ち

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{2.2.1}$$

ここに、rot$\boldsymbol{E}$ はベクトル $\boldsymbol{E}$ の回転 (rotation) と言い、直交座標系では

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \boldsymbol{E}_y}{\partial z}, \frac{\partial \boldsymbol{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \boldsymbol{E}_z}{\partial x}, \frac{\partial \boldsymbol{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \boldsymbol{E}_x}{\partial y}\right) \tag{2.2.2}$$

と表される。(2.2.1) をストークスの定理と言う。(2.2.1) で C によって囲まれた曲面 S は任意に取れる。その訳は、今その様な曲面を二つ取ってそれらによって囲まれた体積を V とし、外向きの法線ベクトルを取ってガウスの定理を適用すると、後で示される div rot $\boldsymbol{E} = 0$ により体積積分が 0 になるからである。

ファラデーによって見い出された電磁誘導は、閉じた曲線 C の周りの起電力 Ω が C によって囲まれた曲面 S を貫く磁束

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{2.2.3}$$

の時間変化に比例するという、レンツの法則から導かれる。即ち

$$\Omega = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{2.2.4}$$

ここに比例定数 c は、後で光の速度であることが分かる。(2.2.3) を (2.2.4) に代入して、Ω にストークスの定理を用いると

$$\int_S \left[\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \right] \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{2.2.5}$$

が成り立つ。更に曲面 S は任意だから

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{2.2.6}$$

が導かれる。

追記: ストークスの定理の証明

曲線 C を x-y 平面に射影して、その曲線に囲まれた曲面を小さな長方形に分割して考える。この長方形は図 4 の様に、その一つの頂点が (x, y) にあり、x-軸、y-軸方向の長さがそれぞれ dx、dy の長方形である。ベクトル $\boldsymbol{E}$ のこの直方形を巡る線積分は、まず A-B の部分の寄与が $E_x(x, y, z)dx$、C-D の部分が $-E_x(x, y + dy, z)dx$ より

$E_x(x, y, z)dx - E_x(x, y + dy, z)dx = -\frac{\partial E_x}{\partial y}dxdy$

また、B-C、D-A の寄与が

$E_y(x + dx, y, z)dy - E_y(x, y, z)dy = \frac{\partial E_y}{\partial dx}dxdy$

より都合

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial dy} \right) dxdy = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial dy} \right) dS_z \tag{2.2.7}$$

ここに dS_z は、x-y 平面内の z-軸方向の微少面積要素である。これらを全ての小さな長方形について足し上げると、x-y 平面に射影した曲線 C についての線積分はその曲線に囲まれた曲面についての上の面積分で表される事が分かる。隣り合う長方形の辺の線積分は、線分の向きが逆なので互いに打ち消しあうからである。y-z、z-x 平面についても同様な議論を行うと、x, y, z を cyclic に回して直交座標系におけるストークスの定理を証明する事が出来る。(証明終り)

図 4: ストークス の定理の証明

2.3　種々の関係式

任意のスカラー場 φ、ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\begin{aligned} \text{rot grad } \varphi = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\varphi = 0 \\ \text{div rot } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = 0 \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

が成り立つ。二番目の式は、ベクトル積の公式 $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}) \cdot \boldsymbol{A}$ から明らかである。これらを用いると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\ \boldsymbol{H} = \text{rot } \boldsymbol{A} \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

と置けば、電磁誘導の式 (2.2.6) と磁場の発散の式 (2.1.6) は自動的に満たされる。φ と $\boldsymbol{A}$ は電磁場のスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルと言われ、アインシュタインの特殊相対性理論において基本的な４元ベクトルを構成している。

もう一つ、後で使用する便利な公式は微分作用素 $\boldsymbol{\nabla}$ の二つの外積の積に関するものである。通常のベクトルに対するよく知られた公式から、任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} \tag{2.3.3}$$

が成り立つ。そこで、$(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}) = \Delta$ (ラプラシアン) を用いると

$$\text{rot rot } \boldsymbol{A} = \text{grad div } \boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{A} \tag{2.3.4}$$

が得られる。

他にも多くの重要な関係式が成り立つが、それらは参考文献を参照されたい。

3　電荷の保存と電流の作る磁場

3.1　電荷の保存と変位電流

電磁気学の最も重要な法則の 1 つは電荷の保存則である。現在のところ、電荷の保存則は厳密に成り立っていると考えられている。それに対して、質量の保存則は近似的にしか成り立っていない。それはアインシュタインの特殊相対性理論によって、質量とエネ

ルギーの等価性が示されたためである。電荷の流れを電流と言うが、それは金属でできた針金 (導線と言う) を流れる場合もあるし、真空中を荷電粒子が飛翔する場合もある。(2.1.3) で電荷 Q を電荷密度 ρ で表した様に、電流密度を

$$\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v} \tag{3.1.1}$$

で表すと便利である。ここに $\boldsymbol{v}$ は荷電粒子の速度ベクトルである。3 次元空間内に閉曲面 S を取って、そこから流れ出る単位時間あたりの電荷量を計算すると、ガウスの定理により

$$\oint_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \mathrm{div}\ \boldsymbol{j} dV \tag{3.1.2}$$

となる。これが全体積 V に含まれる総電荷 $Q = \int_V \rho\ dV$ の減少分 $-\frac{\partial Q}{\partial t}$ に等しいと置くことにより

$$\int_V \left(\mathrm{div}\ \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0 \tag{3.1.3}$$

が得られる。ここに体積 V は任意だから

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \boldsymbol{j} = 0 \tag{3.1.4}$$

これを電荷の保存則という。

これまで、主に真空における電場と電荷の流れについて述べて来たが、電荷の保存は金属や溶液の媒質内や化学反応においても成り立っている。現在では電荷は物資を作っている構成要素、クォークやレプトンの持つ質量とはまた別の固有な物理量 - 内部自由度 - であると考えられている。原子の重要な構成要素の一つである電子の電荷は負であり、その大きさは後で述べる MKS 単位の「クーロン (C)」を用いて $e = 1.602 \cdots \times 10^{-19}$ C である。これを素電荷 (あるいは電気素量) と言う。自然界で観測される荷電粒子は必ず素電荷の整数倍の電荷を持つ。媒質中の電場や磁場については、後で「誘電体と磁性体」のところで詳しく述べるが、金属の中でも原子核やそれに束縛された電場が存在しており、その中を束縛されない電子が動き回ることが出来る。この電子を自由電子という。有限の長さの導線の両端に電位差があると、電子は電位の低い方から高い方へ引き寄せられ、その結果正の電荷が逆に電位の高い方から低い方へ向けて流れる。これが導線の中を流れる電流である。電子の運動は、一般には加速運動であるが、その他の荷電粒子に遮られて、最終的には電子の速度は一定になる。これが定常電流である。これは空から降ってくる雨粒が空気の抵抗により、地表付近では速度が一定になるのと似ている。

定常電流の流線は、無限に延びているか閉じているかのどちらかである。それはもし端があるとすると、そこでは電荷が増大し続けるか減少し続けるかのどちらかであって、そ

れは有限量の電荷の保存からあり得ないからである。しかし、非定常の場合にも電流の定義を少し変えることによって、流線が常に閉じる様にする事が出来る。その為には電場に対するガウスの定理の微分形 (2.1.5) を $\rho = \frac{1}{4\pi}\mathrm{div}\ \boldsymbol{E}$ と書き換え、これを (3.1.4) に代入する。

$$\mathrm{div}\ \left(\boldsymbol{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = 0 \tag{3.1.5}$$

ここに、$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ を真の電流 $\boldsymbol{j}$ と区別して変位電流と言う。

変位電流の意味は、次の様な電気回路 (後で説明する、電池や電球、抵抗やコイル、コンデンサーを導線で繋いで一般化された電流が閉じる様にしたものを電気回路と言う) を考えるとよりはっきりする。図 5 の様に、帯電したコンデンサーを導線で繋ぐ。コンデンサーとは二つの金属板の間に電気を通さない絶縁体を挟んで、電荷を蓄える装置である。コンデンサーに電池を繋ぐと、電極から電荷が流れ出て電流が流れ一つの金属板に正の電荷が、もう一つの金属板に負の電荷が蓄えられる。正の電荷と負の電荷は互いに引き合うので、電池をはずしても電荷はそのまま蓄えられる。電荷は金属板の互いに向き合った表面に蓄えられる。今簡単のため絶縁体はなく金属板の間は真空であると仮定する。後で示す様に、金属板の表面積を S、蓄えられた全電荷を $+Q$ と $-Q$ とすると、金属板の間にはその縁を除いて $|\boldsymbol{E}| = 4\pi Q/S$ の電場ができる。ここで、コンデンサーを導線で繋ぐと導線には真の電流が流れるが、電荷は徐々に減少するので負の変位電流が正に帯電した金属板から負に帯電した金属板に向かって流れる。従って、変位電流の流れの向きは導線を流れる真の電流の流れの向きと同じである。

図 5: 帯電したコンデンサー

次の節で電池の仕組みを説明するが、化学反応においても電荷は保存される。例えば、食塩 - 塩化ナトリウム NaCl - を水に溶かすと、その多くがナトリウムイオン Na^+ と塩素イオン Cl^- に解離する。即ち

$$\mathrm{NaCl} \leftrightarrow \mathrm{Na}^+ + \mathrm{Cl}^- \tag{3.1.6}$$

ここに、電荷の総量は右辺と左辺で等しく 0 である。

3.2 定常電流の作る磁場、ビオ・サバールの法則

時間的に変動しない電流を、定常電流と言う。既に述べた様に、1800 年頃ボルタ電池 (図 6 参照) が発明されてから、定常電流により発生する磁場の研究が急速に発展した。ボルタ電池とは、希硫酸水溶液に亜鉛 Zn と銅 Cu の板を浸し、これらの元素のイオン化傾向の違いを用いて、 Cu から Zn に向かって電荷を移動させる力 - 起電力 - を発生させ

る装置である。Cu を正電極 (陽極 +)、Zn を負電極 (陰極 −) と言い、Cu の方が電位が高い。図 7 の様に、陽極と陰極を導線で繋ぎ、間に電球を挟むと定常電流が流れる閉じた回路が得られる。ボルタ電池の中では、硫酸 H_2SO_4 はその多くが二つの H^+ イオンと SO_4^{--} イオンに解離して溶液の中を自由に流動している。陰極側では Zn が二つの電子 $2e^-$ を放出して、Zn^{++} イオンが SO_4^{--} イオン と結合して硫化亜鉛 $ZnSO_4$ となる。電子の流れは陰極から導線と電球を通って陽極の Cu に達し、そこで水溶液中の $2H^+$ と結合して水素ガス H_2 の気泡として放出される。導線と電球を流れる電流は陽極から陰極に流れる正電荷として定義されるが、これは実際には陰極から陽極に流れる負電荷を持つ電子の流れである。針金等の金属の内部では、金属原子の一番外側にある電子が流体のように動き回っていると考えられ、これを自由電子という。電流を正電荷の移動として定義したのは、単に歴史的産物である。閉じた経路に電荷が過不足なく流れている事は、溶液内でも負イオンが陰極に引きつけられ、正イオンが陽極に引きつけられる事から分かる。化学反応によって生み出される化学エネルギーが、導線内で摩擦によって発生する熱と電球のフィラメントから発生する光のエネルギーに変換されているのである。

図 6: ボルタ電池

図 7: ボルタ電池で電球をつける回路

ビオ・サバールの法則は、定常電流の周りに磁場が生じるという現象である。今簡単のため図 8 の様に直線状に無限に伸びた針金を考え、その両端に電池を繋いで定常電流を流す。電流密度を $\boldsymbol{j}$ とし針金の断面積を S とすると、$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{j}S$ は針金を流れる電流であり、単位時間に流れる電荷の総量を表す。針金から r だけ離れたところでは右ネジの回る向きに、大きさが $H = \frac{2}{cr}I$ の定磁場が生じる。この事はビオ・サバールの法則により次の様に証明される。ビオ・サバールの法則によると、長さ dl の線素を流れる電流 $\boldsymbol{I}$ が位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の点に作る磁場 $d\boldsymbol{H}$ は

$$d\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{I}d\ell \times \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{3.2.1}$$

と表される。そこで、図 8 の様に角度 θ を取って微少部分 dz からの寄与を全て足し上げると

$$H = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} Idz\frac{\sin\,(\pi-\theta)}{z^2+r^2} = \frac{2I}{c}\int_0^{\infty} dz\ \frac{r}{(z^2+r^2)^{3/2}} \tag{3.2.2}$$

$$= \frac{2I}{cr}\int_0^{\infty} dx\ \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{2I}{cr} \tag{3.2.3}$$

ここに、$\sin\,(\pi-\theta) = \sin\ \theta = \frac{r}{\sqrt{z^2+r^2}}$ を用いた。

図 8: 無限に伸びた針金を流れる定常電流の作る磁場

針金の周りの半径 r の円の経路 C に沿って起電力の場合と同様に起磁力 (磁位ともいう) を計算すると $2\pi r \times \frac{2I}{cr} = \frac{4\pi}{c}I$ より

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{4\pi}{c}I \tag{3.2.4}$$

が成り立つ。これをアンペールの法則という。ここでは詳しい計算は省略するが、(3.2.4) の結果は実は電流 I を囲む任意の閉曲線 C について成り立つことを示す事が出来る。ここに電流 I として変位電流も含めた

$$I = \int_S \left(\boldsymbol{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{3.2.5}$$

を用い、(3.2.4) にストークスの定理を用いると、任意の閉曲線 C に囲まれた曲面 S に対して

$$\int_S \left(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} \right) \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{3.2.6}$$

が成り立つ。ここから Maxwell 方程式の最後の式

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{3.2.7}$$

が得られる。変位電流も含めた (3.2.4) をアンペール・マックスウェルの法則という。

3.3 円環電流の作る磁場、ソレノイド

ビオ・サバールの法則を用いて、円環電流の作る磁場を計算することが出来る。図 9 の様に半径 r の円環を流れる定常電流 I が円の中心に作る磁場は、(3.2.1) の $\boldsymbol{I}$ と $\boldsymbol{r}$ が直角をなすことから簡単に

$$H = \frac{1}{c} \frac{I\ 2\pi r}{r^2} = \frac{2\pi I}{cr} \tag{3.3.1}$$

となる。$\boldsymbol{H}$ の方向は、$\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{H}$ が右ネジの方向を向くように決まる。

図 9: 定常円環電流の作る磁場

もう一つの応用例は、図 10 の様に円環状に一様に巻いたコイルである「ソレノイド」の内部に出来る磁場である。ここに、導線はソレノイドの単位長さあたり n 回巻かれており、ソレノイドは充分長く端の効果は無視できると理想化して考える。証明には、(3.2.4) のアンペールの法則を図 10 のような閉じた経路について適用すると簡単である。ここに、細長い長方形の短辺の効果やソレノイドの外部からの寄与は無視出来ると考える。長

辺の長さ ℓ に対して、長方形を貫く電流の総量は ℓnl だから

$$
\begin{aligned}
H\ell &= \frac{4\pi}{c}\ell nl \\
H &= \frac{4\pi}{c}nI
\end{aligned} \tag{3.3.2}
$$

となる。また、ソレノイドの中の磁場が一様であることも同時に証明出来る。

図 10: ソレノイドの内部の磁場

3.4 ローレンツ力

荷電粒子が電場と磁場から受ける力をローレンツ力と言う。真空においてはこの力は、電荷 q に対して

$$
\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H} \tag{3.4.1}
$$

で与えられる。ここに $\boldsymbol{v}$ は荷電粒子の速度である。q として電荷密度 ρ を取り電流密度 $\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}$ を使うと右辺は $\rho\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}$ となる。今 $\boldsymbol{E}=0$ として、断面積 S 長さ $d\ell$ の針金の部分に働く力は電流を $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{j}S$ として $d\boldsymbol{F}=\frac{1}{c}\boldsymbol{I}d\ell\times\boldsymbol{H}$ となる。そこで、図 11 の様に無限に伸びた距離 r だけ離れた二本の針金にそれぞれ定常電流 I_1、I_2 を流す時、それらの間に働く力は単位長さあたり

$$
\frac{dF}{d\ell} = \frac{2}{cr}I_1 \times \frac{1}{c}I_2 = \frac{2}{c^2 r}I_1 I_2 \tag{3.4.2}
$$

である。二つの定常電流が同じ向きの時針金の間には引力が、反対向きの時斥力が働く。

図 11: 定常電流の流れる二本の平行に置いた針金に働く力

3.5 Maxwell 方程式

(2.1.5), (2.1.6), (2.2.6) および (3.2.7) は、真空中を流れる電荷と電流に対する電磁気学の基本方程式である、いわゆる Maxwell 方程式の組みを与えている。もう一度これらをまとめると、まず第一の組みは

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\ \boldsymbol{H} &= 0 \\
\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{3.5.1}
$$

第二の組みは電荷密度と電流密度を含んでおり

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\ \boldsymbol{E} &= 4\pi\rho \\
\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{3.5.2}
$$

「種々の関係式」のところで既に述べた様に、電場と磁場 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ を電磁場のスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル φ, $\boldsymbol{A}$ を使って (2.3.2) の様に

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\mathrm{grad}\ \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\ \boldsymbol{H} &= \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

と書けば、(3.5.1) の第一の組みは自動的に満たされる。すなわち、第一の組みは電場と磁場をポテンシャルによって表現した時に幾何学的に満たされる関係式で、あとで相対論的記述に置いてビアンキ関係式 (Bianchi relation) と呼ばれるものである。第二の組みは電磁場の運動方程式と呼ばれており、(3.5.3) を (3.5.2) に代入することによりポテンシャルに対する運動方程式が得られる。しかし、その前にゲージ変換という現代物理学において大変重要になった概念を理解する必要がある。

(3.5.3) でゲージ変換とは、任意のスカラー関数 $f(\boldsymbol{r},t)$ に対して

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial f(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \\ \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}' + \mathrm{grad}\ f(\boldsymbol{r},t) \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

により、$\varphi \to \varphi'$, $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$ に移ることである。容易に分かるように、この変換により $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ は変わらない。つまり、ポテンシャルによる物理量である電場、磁場の記述にはゲージ変換だけの不定性がある。逆に言えば、物理現象はゲージ変換に対して不変でなければならない。以下では、この自由度を用いてポテンシャルに対する運動方程式が一番簡単になるように調整する。まず (3.5.3) を (3.5.2) に代入すると、(2.3.4) の関係式を使って

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{div}\ \boldsymbol{A}}{\partial t} &= 4\pi\rho \\ \mathrm{grad}(\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}) - \Delta\boldsymbol{A} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{grad}\ \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{(\partial t)^2} \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

となる。そこで

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{3.5.6}$$

を仮定すると (3.5.5) の二式は

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{(\partial t)^2} - \Delta\right]\varphi &= 4\pi\rho \\ \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{(\partial t)^2} - \Delta\right]\boldsymbol{A} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

となる。(**??**) をローレンツ条件 (Lorentz condition) という。この条件に (3.5.4) のゲージ変換を適用すると

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \mathrm{div}\ \boldsymbol{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} \tag{3.5.8}$$

$$-\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{(\partial t)^2} - \Delta\right] f(\boldsymbol{r}, t) \tag{3.5.9}$$

となるので、$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t} = 0$ となる様にゲージ関数 $f(\boldsymbol{r}, t)$ を選んで常にローレンツ条件 (3.5.7) が満たされる事を仮定すると、ポテンシャルに対する運動方程式は

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{(Lorentz condition)} \tag{3.5.10}$$

$$\Box\varphi = 4\pi\rho$$

$$\Box\boldsymbol{A} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{3.5.11}$$

となる。ここに

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{(\partial t)^2} - \Delta \tag{3.5.12}$$

は、ラプラシアン Δ を時間成分を相対論的不変量になる様に拡張したものでダランベリアン (d’Alemberian) と呼ばれている。

4 電磁気学の単位系について

ここで、電磁気学で使われる単位系について簡単に述べる。実際には、電磁気学で使われる単位系は歴史的な発展の経過にも関係していて複雑多岐に及んでおり、系統的な記述も困難を極めている。その中で、ここでは理論的に一番整合性が取れている cgs-ガウス単位系 (以下簡単のため「ガウス単位系」という) とその基となった cgs-esu 単位系 (cgs-静電単位系)、cgs-emu 単位系 (cgs-電磁単位系)、及び実用上重要な国際単位系 (SI 単位系) である MKSA 単位系についてその歴史的起源よりもむしろ繋がりを中心に説明する。

電磁気学における単位系の難しい理由は以下順を追って説明するが、基本的には物理法則そのものが単位系に依存すると言うことである。例えばニュートンの第二法則は cgs 単位系でも MKS 単位系でも $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ であり同じであるが、電磁気学では例えばアンペールの法則は cgs-ガウス単位系では (3.2.4) であり MKS 単位系ではあとで見るように (4.1.15) であり、その形自体が異なっている。これは、例えば同じ「電場の強さ」と言っても単位系が違えば、その数値が違うだけでなく次元すら異なる事を意味する。すなわち、ガウス系の「電場の強さ」と MKS 単位系の「電場の強さ」とは全く別の物理量と考

えるのである。もちろん、同じ現象を違う風に記述しているだけだから、全く無関係という訳ではなく、一定の対応関係は存在する。我々は以下で磁荷の単位である Wb (ウェーバー) についてこれを典型的に見るであろう。ここでの記述は、青野修著「電磁気学の単位系」(パリティ物理学コースークローズアップ、丸善株式会社) によっている。この本の著者に感謝します。

4.1 導入、MKSA 単位系

まずガウス単位系は、既にクーロンの法則 (1.1.1) のところで述べた様に結合定数 k が 1 となるように電荷の単位を決めた cgs-esu 単位系を出発点としている。つまり、cgs-esu 単位系における電荷の単位は 1 cm の距離に置いた二つの同じ大きさの異質電荷が互いに $1\ \mathrm{dyn} = 1\ \mathrm{g \cdot cm/s^2}$ の引力を及ぼし合う様に決める。それは、$\mathrm{esu{=}dyn^{\frac{1}{2}}cm} = \mathrm{g^{\frac{1}{2}}cm^{\frac{3}{2}}s^{-1}}$ の単位を持っている。質量、長さ、時間の次元をそれぞれ M, L, T で表すと電荷の次元 [Q] は、$[\mathrm{Q}] = \mathrm{M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}}$ である。この単位系では力学的単位以外に新しい電気力学的単位を持ち込む必要がないという点で優れているが、この電荷の単位は非常に小さく実用的でない。そこで万有引力の場合の様に、(1.1.1) の k に単位を持たせて新しく電荷の単位クーロン (C) をおよそ

$$1\ \mathrm{C} = 3 \times 10^9\ \text{cgs-esu} \tag{4.1.1}$$

により定義する。すると、クーロンは MKS 単位系であるので

$$\begin{aligned}\frac{(1\ \mathrm{C})^2}{(1\ \mathrm{m})^2} &= 9 \times 10^{14} \times \frac{(1\ \text{cgs-esu})^2}{(1\ \mathrm{cm})^2} \\ &= 9 \times 10^{14}\ \mathrm{dyn} = 9 \times 10^9\ \mathrm{N}\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

つまり (1.1.1) の k は

$$k = 9 \times 10^9\ \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}} \tag{4.1.3}$$

であることが分かる。より正確には、(4.1.1) の 3×10^9 という数字は実は電磁気学で基本的な光の速度 $c = 2.99792458 \times 10^{10}\ \mathrm{cm/s} = 2.99792458 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$ に関係していて cgs 単位系の数値 $|c| = 2.99792458 \times 10^{10}$ を固定して

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-11}|c|^2\ \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}} = c^2 \times 10^{-7}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A^2}} = (2.99792458)^2 \times 10^9\ \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}} \tag{4.1.4}$$

である。ここに、電流の単位を 1 A=1 C/s とした。真空は誘電体でないため電気定数 (electric constant) ε_0 は誘電率ではないが、これを一般に真空の誘電率と呼んでいる。

これまで使ってきたガウス単位系で、定常電流の作る磁場を記述するビオ・サバールの法則 (3.2.1) やアンペールの法則 (3.2.4)、ローレンツ力の式 $\rho\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H}$ (see (3.4.1) で c が現れるのは、(3.1.1) で電流密度を $\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v}$ で定義した事に関係している。特殊相対論では、相対論的 4 元ベクトル j^μ は $j^\mu = (\rho c, \boldsymbol{j})$ の形をしている。(http://qmpack.homelinux.com/˜fujiwara/ensyu.html の A4 演習ノート、6 ページ (4 元カレント) の項参照) すなわち、他の 4 元ベクトル $x^\mu = (ct, x)$, $P^\mu = (E/c, \boldsymbol{p})$ と同様に、時間成分と空間成分は同じ次元を持っていなければならない。この事は、電荷密度 ρ だけで全てを記述しようとすると電流密度は必ず $\boldsymbol{j}/c$ の形で現れる事を意味する。電流の単位は、(3.1.1) から電流密度に単位面積を掛けて 1 秒間に 1 C の電荷の流れを 1 A (アンペア) と定義する。すなわち、1 A = 1 C/s である。この単位は MKS 単位系である。cgs-esu 単位系では 1 stA (static アンペア = 1 esu/s であるので、(4.1.1) より 1 C = $(|c|/10)$ esu だから 1 A = $(|c|/10)$ esu/s = $|c|/10$ dyn$^{\frac{1}{2}}$cm/s = $c/10$ dyn$^{\frac{1}{2}}$ となる。ここに、$c = |c|$ cm/s である。そこで (3.4.2) によると、1 cm だけ離れた 2 本の導線にそれぞれ 1 A の電流を流した時に働く力は 1 cm あたり

$$2/c^2\ \mathrm{A}^2/\mathrm{cm} = (2/c^2)(c/10)^2\ \mathrm{dyn/cm} = 2/100\ \mathrm{dyn/cm} \tag{4.1.5}$$

つまり 2/100 dyn であることが分かる。あとで見るように、ガウス単位系におけるアンペア (これをアブアンペアと言って abA=c dyn$^{1/2}$ で表わす) は現在の MKS 単位系のアンペアの 10 倍 (つまり 1 abA = 10 A) なので、2 本の導線にそれぞれ 1 abA を流した時に働く力は 1 cm あたり 2 dyn となる。

MKS 単位系ではクーロンやアンペアという電磁気学に固有の単位を新しく導入したために、誘電体の理論の枠組みを用いて「電場の強さ」という概念と「電束密度」を明確に区別するのが普通である。まず「電場の強さ」は $\boldsymbol{E}$ (1.1.3) に従って、1 C の電荷をその電場に置いた時に 1 N の力を生じる様な電場の強さと定義する。すなわち、単位は N/C である。一方「電束密度」では、電荷に対するガウスの法則 (1.1.5) を MKS 単位で書いて

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{4.1.6}$$

ここで

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{4.1.7}$$

と定義して「電束密度」と呼ぶと (4.1.6) は

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = Q \tag{4.1.8}$$

となる。電束密度の単位は、(その表面が閉じているかいないかに関わらず) 単位面積あたりを通過する電荷の量 $\mathrm{C/m^2}$ である。

磁場に関しても (4.1.7) にならって、「磁場の強さ」$\boldsymbol{H}$ と「磁束密度」$\boldsymbol{B}$ を

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{4.1.9}$$

で定義して、μ_0 を真空の透磁率という。精密な測定により、真空中の Maxwell 方程式に現れる定数 $\varepsilon_0\mu_0$ がほぼ正確に

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} \tag{4.1.10}$$

を満たす事が確かめられ、それが光が電磁波である事の根拠となった。(4.1.4) の ε_0 の値から、μ_0 の値は MKS 単位で

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2} \tag{4.1.11}$$

であることが分かる。

MKS 単位系ではビオ・サバールの法則 (3.2.1) には $\frac{c}{4\pi}$ が掛かるが、更に μ_0 を掛けて磁束密度の形で

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{I} d\ell \times \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{4.1.12}$$

と表すのが普通である。そこで、無限に伸びた導線を流れる定常電流の作る磁束密度は (3.2.3) に対して

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \tag{4.1.13}$$

また、半径 r の円環を流れる定常電流 I が円の中心に作る磁束密度は

$$B = \mu_0 \frac{l}{2r} \tag{4.1.14}$$

である。一方、アンペールの法則 (3.2.4) は因子 $\frac{4\pi}{c}$ が無く

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I \tag{4.1.15}$$

ローレンツ力の式 (3.4.1) は MKS 単位系では c が無く、かつ $\boldsymbol{H}$ を $\boldsymbol{B}$ に変えて

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{4.1.16}$$

である。そこで、無限に伸びた距離 r だけ離れた二本の導線にそれぞれ定常電流 I_1、I_2 が流れる時、それらの間に働く力は単位長さあたり

$$\frac{dF}{d\ell} = 2\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 I_2}{r} = 2 \times 10^{-7}\frac{I_1 I_2}{r}\ \mathrm{N/A^2} \tag{4.1.17}$$

となる。すなわち、図 8 の様に同じ方向に 1 A の電流が流れる時、1 m 離れた導線 1 m あたりに働く引力は 2×10^{-7} N である。現在ではこれを 1 A の定義とし、1 C = 1 A・s として 1 クーロンが定められている。これを MKSA 単位系という。

MKSA 単位系における磁荷量、或いは磁束の単位はウェーバー (Wb) である。磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の単位は $\mathrm{Wb/m^2}$ で、これを テスラ (T) という。つまり $1\ \mathrm{T} = 1\ \mathrm{Wb/m^2}$ である。ウェーバーは電荷量、或いは電束の単位であるクーロン (C) に対応する単位である。そこで、磁荷に対してもクーロンの法則を考えて (1.1.1)

$$F = k_m \frac{q_m Q_m}{r^2} \quad , \quad F = \frac{q_m Q_m}{r^2} \tag{4.1.18}$$

とすると、MKSA 単位系では

$$k_m = \frac{1}{4\pi\mu_0} = \frac{1}{(4\pi)^2} \times 10^7\ \mathrm{A^2/N} \tag{4.1.19}$$

である。(1.1.3) にならって

$$\boldsymbol{F} = q_m \boldsymbol{H} \tag{4.1.20}$$

とすると磁場の強さの単位は 1 N/Wb であり

$$\boldsymbol{H} = k_m \frac{Q_m}{r^2} \tag{4.1.21}$$

かつ

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q_m}{r^2} \tag{4.1.22}$$

である。MKSA 単位系におけるアンペールの法則 (4.1.15) から、Wb は A と 1 N/Wb = 1 A/m で結びついている。従って、Wb = N m/A である。つまり、1 Wb A = 1 Nm = 1 J である。この式は、電場に対する 1 C V = 1 Nm = 1 J に似ている。MKSA 単位系における電束の定義とレンツの法則は、(2.2.3), (2.2.4) に変わって

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{4.1.23}$$

および

$$\Omega = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{4.1.24}$$

となる。現在のところ単磁子 (monopole) は存在しないが、それが存在すると仮定して、1 Wb の単磁子 $Q_m = 1$ Wb の作る磁束は (4.1.23) と (4.1.22) から

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = Q_m = 1\ \mathrm{Wb} \tag{4.1.25}$$

となる。また電磁誘導の式 (2.2.5) は MKSA 単位系では c が取れて $\boldsymbol{H}$ が $\boldsymbol{B}$ に変わって

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{4.1.26}$$

となる。この式と (4.1.22) で $Q_m = 0$ としたものは、ガウス単位系の (3.5.1) に対応する MKSA 単位系における Maxwell 方程式の第一の組みを与える。即ち

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\ \boldsymbol{B} &= 0 \\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \end{aligned} \tag{4.1.27}$$

第二の組みは (4.1.8) と電荷の保存の式、及びアンペールの法則から簡単に求めることが出来る。結果は

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\ \boldsymbol{D} &= \rho \\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \end{aligned} \tag{4.1.28}$$

まとめると、MKSA 単位系では真空中の電磁気学に関する限り電荷と磁荷の単位 C と Wb はそのまま電束と磁束の単位であり、電束密度と磁束密度の単位は C/m^2 と Wb/m^2=Tesla である。また、電流は単位時間あたりの電気量 1 A=1 C/s、起電力 (電位、電圧ともいう) = 電場の強さ × 1 m = 1 N/C × m = 1 V より 1 CV = 1 Nm = 1 J (ジュール) である。また、磁場の強さの単位は N/Wb よりアンペールの法則から 起磁力 (磁位) = 磁場の強さ × 1 m = 1 N/Wb × m= 1 A より、1 Wb A = 1 Nm = 1 J である。つまり、C ↔ V かつ Wb ↔ A の対応がある。電場の強さと磁場の強さの単位は、N/C = V/m, N/Wb = A/m とも書ける。

4.2 cgs-esu 単位系

以下では、青木修氏の著作に従って MKSA 単位系の公式から出発して順次、cgs-esu, cgs-emu, ガウス単位系の関係式と換算公式を述べる。まず、cgs-esu 単位系の物理量を MKSA 単位系のそれに添字 1 をつけて表わす。 ここでは、MKSA 単位系の ε_0 と μ_0 の値を (4.1.4) と (4.1.10) に固定する。すなわち (4.1.11) から出発して、 (4.1.10 より

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2} \\ \varepsilon_0 &= 1/(4\pi c^2) \times 10^7\ \mathrm{A^2/N} \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

ここで C=As, N/A^2=10^5 dyn s^2/C^2 及び A^2/N=J^2/(NWb^2)=N(m/Wb)^2 より

$$
\begin{aligned}
\sqrt{k} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} = \frac{c}{10}\ \mathrm{dyn}^{1/2}s/\mathrm{C} = \frac{|c|}{10}\ \mathrm{dyn}^{1/2}\mathrm{cm/C} \\
&= \frac{|c|}{10}\ \mathrm{esu/C} \\
1/\sqrt{k} &= \frac{10}{|c|}\ \mathrm{C/(dyn^{1/2}cm)} \\
4\pi\sqrt{k_m} &= 10^8\ (\mathrm{dyn}^{1/2}cm)/Wb \\
1/\sqrt{k_m} &= 4\pi\times 10^{-8}\ \mathrm{Wb/(dyn^{1/2}cm)}
\end{aligned}
\tag{4.2.2}
$$

まず MKSA 単位系におけるクーロンの法則を

$$
F = k\frac{qQ}{r^2} = \frac{(\sqrt{k}q)(\sqrt{k}Q)}{r^2} = \frac{q_1 Q_1}{r^2} \tag{4.2.3}
$$

と書くと、cgs-esu 単位系の電荷 q_1 は MKSA 単位系での電荷 q と

$$
q_1 = \sqrt{k}q \tag{4.2.4}
$$

で結び付けられる。そこで、(4.2.2) の $\sqrt{k}$ を用いると $q = 1$ C に対して

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \sqrt{k}q = \frac{|c|}{10}\ \mathrm{dyn}^{1/2}\mathrm{cm/C1C} \\
&= \frac{|c|}{10}\ \mathrm{dyn}^{1/2}\mathrm{cm} = \frac{|c|}{10}\ \mathrm{esu}
\end{aligned}
\tag{4.2.5}
$$

これは、1 C の定義から当然である。次に電流は単位時間あたりに流れる電荷量だから (4.2.4) より

$$
I_1 = \sqrt{k}I \tag{4.2.6}
$$

そこで、1 A=1 C/s に対しては

$$
I_1 = \sqrt{k}\ 1\ \mathrm{A} = \frac{|c|}{10}\ \mathrm{dyn}^{1/2}\mathrm{cm/s} = \frac{|c|}{10}\ \mathrm{stA} \tag{4.2.7}
$$

ここに 1 stA=1 dyn$^{1/2}$ cm/s は cgs-esu 単位系における電流の単位で static Ampare と呼ぶ。

電場の強さは

$$
\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = (\sqrt{k}q)(1/\sqrt{k})\boldsymbol{E} = q_1\boldsymbol{E}_1 \tag{4.2.8}
$$

と書いて

$$
\boldsymbol{E}_1 = (1/\sqrt{k})\boldsymbol{E} \tag{4.2.9}
$$

である。そこで MKSA 単位系における電場の強さ 1 N/C は cgs-esu 単位系での $\frac{10^6}{|c|}$ $\mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{cm}=\frac{10^6}{|c|}$ dyn/esu に対応する。起電力 (電位、電圧) V はある経路に沿った線積分で表わせるから 1 V = 1 J/C = 1 Nm/C は

$$V_1 = (1/\sqrt{k})V = (1/\sqrt{k})(1V) = \frac{10^8}{|c|}\mathrm{erg/esu} \tag{4.2.10}$$

に対応する。これと (4.2.5) を用いると $q_1V_1 = 10^7$ erg=1 J が再現される。そこで cgs-esu 単位系での電圧の単位は 1 stV=1 erg/esu で、1 esu・stV =1 erg であることが分かる。

cgs-esu 単位系での電束密度は $\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{E}_1$ あるいは $D_1 = E_1$ で特徴付けられる。そこで MKSA 単位系の $D = \varepsilon_0 E$ を

$$4\pi(4\pi\varepsilon_0)^{-1/2}D = (4\pi\varepsilon_0)^{1/2}E \tag{4.2.11}$$

と書いて、$4\pi\sqrt{k}D = (1/\sqrt{k})E$ だから $D_1 = E_1$ とするためには $D_1 = 4\pi\sqrt{k}D$。すなわち

$$\boldsymbol{D}_1 = 4\pi\sqrt{k}\boldsymbol{D} \tag{4.2.12}$$

そこで

$$\begin{aligned} E &= 1\ \mathrm{N/C} \to E_1 = (1/\sqrt{k})E \\ &= 10/|c| \times 10^5\ \mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{cm} = 10^6/|c|\ \mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{cm} \\ D &= 1\ \mathrm{C/m}^2 \to D_1 = 4\pi\sqrt{k}D \\ &= 4\pi|c|/10^5\ \mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{cm} \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

の対応がある。cgs-esu 単位系では電場の強さ、電束密度の単位は共に $\mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{cm}$ である。一方、電束の単位は (4.1.8) より MKSA 単位系では C であるが、cgs-esu 単位系では $\mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{cm}\cdot\mathrm{cm}^2=\mathrm{dyn}^{1/2}$ cm=esu である。しかし (4.1.8) は (4.2.12) と (4.2.4) より

$$\oint_S \boldsymbol{D}_1 \cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi Q_1 \tag{4.2.14}$$

と 4π が付く。これは cgs-esu 単位系におけるクーロンの法則が

$$\begin{aligned} F &= \frac{q_1 Q_1}{r^2} \\ \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{D}_1 &= \frac{Q_1}{r^2}\boldsymbol{e}_r \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

であることから当然である。

cgs-esu 単位系におけるアンペールの法則は (3.2.4) や (4.1.15) (MKSA 単位系) と違って

$$\oint_C \boldsymbol{H}_1 \cdot d\boldsymbol{l} = 4\pi I_1 \tag{4.2.16}$$

と 4π を付けて定義される。これを用いて cgs-esu 単位系での磁場の強さ $\boldsymbol{H}_1$ の変換則を求めると、$I_1 = \sqrt{k}I$ より $\boldsymbol{H}_1 = 4\pi\sqrt{k}\boldsymbol{H}$ となる。(4.2.2) で $\mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{A}$=Wb $\mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{J}=10^{-7}$ Wb/($\mathrm{dyn}^{1/2}$ cm) より

$$\begin{aligned}\sqrt{k} &= \frac{c}{10}\ \mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{A} = c \times 10^{-8}\ \mathrm{Wb}/(\mathrm{dyn}^{1/2}\mathrm{cm}) \\ &= |c| \times 10^{-8}\ \mathrm{Wb}/(\mathrm{dyn}^{1/2}\mathrm{s})\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

そこで、$H = 1$ N/Wb に対して

$$H_1 = 4\pi\sqrt{k}\ (1\ \mathrm{N/Wb}) = 4\pi|c| \times 10^{-3}\ \mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{s} \tag{4.2.18}$$

従って cgs-esu 単位系における磁場の強さの単位は $\mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{s}$ である。更に磁荷の単位は、$F = (q_m)_1 H_1$ から

$$(q_m)_1 = 1/(4\pi\sqrt{k})q_m \tag{4.2.19}$$

を用いて決まる。即ち q_m=1 Wb に対して

$$(q_m)_1 = 1/(4\pi\sqrt{k})\ (1\ \mathrm{Wb}) = 1/(4\pi|c|) \times 10^8\ \mathrm{dyn}^{1/2}\mathrm{s} \tag{4.2.20}$$

即ち cgs-esu 単位系における磁荷の単位は $\mathrm{dyn}^{1/2}$ s だが、これに更に $(1/4\pi)$ 付け加えて 1 stWb=$(1/4\pi)$ $\mathrm{dyn}^{1/2}$ s としておくと便利である。すると

$$\begin{aligned}q_m = 1\ \mathrm{Wb} &\to (q_m)_1 = (1/|c|) \times 10^8\ \mathrm{stWb} \\ H = 1\ \mathrm{N/Wb} &\to H_1 = |c| \times 10^{-3}\ \mathrm{dyn/stWb}\end{aligned} \tag{4.2.21}$$

で $F = (q_m)_1 H_1 = 10^5$ dyn=1 N となる。磁場の強さの単位は 1 dyn/stWb = 4π $\mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{s}$ だから、起磁力の単位は 1 (dyn/stWb) cm = 4π stA と 1 stA ではなしに 4π が付く。従って、MKSA 単位系の 1 A に対応する cgs-esu 単位系における起磁力は $4\pi(|c|/10)$ stA と 4π が付く。

磁束密度 $\boldsymbol{B}_1$ に対しては、レンツの法則より

$$\boldsymbol{B}_1 = (1/\sqrt{k})\boldsymbol{B} \tag{4.2.22}$$

だから $B = 1$ Wb/m^2=1 N/(Am) に対して

$$\begin{aligned}
B_1 &= 10/|c| \text{ C/(dyn}^{1/2}\text{cm)Wb/m}^2 = 10/|c| \text{ Ns/m/(dyn}^{1/2}\text{cm)} \\
&= 10^4/|c| \text{ dyn}^{1/2}\text{s/cm}^2 \\
&= (4\pi/|c|) \ \times 10^4 \text{stWb/cm}^2
\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

となる。そこで cgs-esu 単位系における磁束密度の単位は stWb/cm^2、磁束の単位は stWb である。この単位系に対する磁束密度と磁場の強さの関係は

$$\boldsymbol{B}_1 = (1/\sqrt{k})\boldsymbol{B} = (1/\sqrt{k})\mu_0(1/4\pi\sqrt{k})\boldsymbol{H}_1 = \varepsilon_0\mu_0\boldsymbol{H}_1 = (1/c^2)\boldsymbol{H}_1 \tag{4.2.24}$$

となる。これは (4.1.10) で、$\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{E}_1$ に対応して $\varepsilon_0 = 1$ と選ぶ事に対応する。

磁気的クーロン力に対しては cgs-esu 単位系では (4.2.19) と (4.2.24) より

$$\begin{aligned}
F &= k_m q_m Q_m/r^2 = (4\pi)^2 k k_m (q_m)_1 (Q_m)_1/r^2 = c^2 (q_m)_1 (Q_m)_1/r^2 \\
F &= c^2 \ (1 \text{ stWb/cm})^2 = ((1/4\pi)c \text{ dyn}^{1/2}\text{s/cm})^2 = (|c|/4\pi)^2 \text{ dyn} \\
&= 5.6913\cdots \times 10^{18} \text{ dyn}
\end{aligned} \tag{4.2.25}$$

そこで $q_m = Q_m = 1\text{Wb} = 10^8/|c|\text{stWb}, r = 1\text{m}$ に対し

$$F = (1/4\pi)^2 \times 10^{12} \text{ dyn} = (1/4\pi)^2 \times 10^7 \text{ N} \tag{4.2.26}$$

となって (4.1.18) - (4.1.19) が再現される。

また二本の導線に働く力は (4.1.17) と (4.2.6) から

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{d\ell} &= 2\frac{\mu_0}{4\pi}(1/k)\frac{(I_1)_1(I_2)_1}{r} \\
&= 2\frac{1}{c^2}\frac{(I_1)_1(I_2)_1}{r}
\end{aligned} \tag{4.2.27}$$

そこで $(I_1)_1 = (I_2)_1 = 1$ stA=1 dyn$^{1/2}$ cm/s、r=1 cm に対して

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{d\ell} &= 2\frac{1}{c^2}\frac{(\text{stA})^2}{\text{cm}} = 2\frac{1}{|c|^2} \text{ dyn/cm} \\
&= 2/(2.99792\cdots)^2 \times 10^{-20} \text{ dyn/cm} \\
&= 2.2225\cdots \times 10^{-21}\text{dyn/cm}
\end{aligned} \tag{4.2.28}$$

となる。

最後に Maxwell 方程式は

$$\begin{aligned}
\text{div } \boldsymbol{B}_1 &= 0 \\
\text{rot } \boldsymbol{E}_1 &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t}
\end{aligned} \tag{4.2.29}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\ \boldsymbol{D}_1 &= 4\pi\rho_1 \\
\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H}_1 &= 4\pi\boldsymbol{j}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{D}_1}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{4.2.30}
$$

となる。この場合 $\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{B}_1 = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{E}_1$ である。

4.3 cgs-emu 単位系

cgs 単位系における磁荷量の単位は電荷のクーロン力の場合の様に、(4.1.18) で $k_m = 1$ と取るのが一番簡単である。この時の磁荷量を 1 emWb (electro-magnetic Weber) あるいは 1 Mx (Maxwell) といい、これを出発点とする単位系を cgs-emu (electro-magnetic unit) 単位系 (cgs 電磁単位系) という。この時 1 emWb^2/(1 cm)^2 = 1 dyn より、1 emWb = 1 (dyn)$^{1/2}$ cm であるが、 1 emWb = 1 esu ではない。cgs-esu と cgs-emu は全く別の単位系である。 相互の関係は、MKSA 単位系の Wb を cgs-esu 単位系や cgs-emu 単位系で表わす事によって得られる。以下では cgs-emu 単位系での物理量を添字 2 を付けて表わす。MKSA 単位系と cgs-emu 単位系における磁荷量の関係は、(4.2.3) 及び (4.2.4) にならって

$$
(q_m)_2 = \sqrt{k_m} q_m \tag{4.3.1}
$$

だから (4.2.2) より $q_m = 1$ Wb に対して $(q_m)_2 = (1/4\pi) \times 10^8$ emWb (Mx) となる。磁場強さは $F = (q_m)_2 H_2$ より $H_2 = (1/\sqrt{k_m})H$ だから、$H = 1$ N/Wb に対して

$$
H_2 = (1/\sqrt{k_m})(1\ \mathrm{N/Wb}) = 4\pi \times 10^{-3}\ \mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{cm} \tag{4.3.2}
$$

従って cgs-emu 単位系における磁場の強さの単位は dyn$^{1/2}$/cm=dyn/emWb である。これを Oe (Oersted: エルステッド) という。即ち 1 Oe=1 dyn/Mx=1 dyn/emWb=dyn$^{1/2}$/cm で、$H = 1$ N/Wb に対して $H_2 = 4\pi \times 10^{-3}$ Oe が対応する。1 Mx Oe=1 dyn より $q_m = 1$ Wb $\rightarrow$ $(q_m)_2 = (1/4\pi) \times 10^8$ Mx から $F = (q_m)_2 H_2 = 10^5$ dyn=1 N となって元へ戻る。cgs-emu 単位系における起磁力 (磁位) の単位を Gb (Gilbert) という。すなわち 1 Gb=1 Oe cm=1 dyn$^{1/2}$ である。そこで MKSA 単位系の 1 A に対応する起磁力は、cgs-emu 単位系では $4\pi/10$ Gb である。

cgs-esu 単位系における $\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{E}_1$ には対応して、cgs-emu 単位系における電束密度 $\boldsymbol{B}_2$ は $\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{H}_2$ によって定義される。これは (4.1.10) で $\mu_0 = 1$ ととる事に対応する。そこで MKSA 単位系における $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ を

$$
4\pi(4\pi\mu_0)^{-1/2}\boldsymbol{B} = (4\pi\mu_0)^{1/2}\boldsymbol{H} \tag{4.3.3}
$$

と書いて、$4\pi\sqrt{k_m}\boldsymbol{B} = (1/\sqrt{k_m})\boldsymbol{H}$ だから $\boldsymbol{B}_2 = 4\pi\sqrt{k_m}\boldsymbol{B}$。すなわち (4.2.2) より $B = 1$ Wb/m^2=1 T に対して

$$\begin{aligned} B_2 &= 4\pi\sqrt{k_m}\ (1\ \mathrm{T} = 10^4\ \mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{cm} \\ &= 10^4\ \mathrm{G} \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

ここに 1 G=1 (dyn$^{1/2}$ cm/cm^2=1 emWb/cm^2=1 Mx/cm^2 は cgs-emu 単位系 (或いは cgs-ガウス単位系) における磁束密度の単位である。磁束の単位は

$$\Phi_2 = \int_S \boldsymbol{B}_2 \cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi\sqrt{k_m}\Phi \tag{4.3.5}$$

より $\Phi = 1$ Wb に対して $\Phi_2 = 10^8$ Mx となる。

cgs-emu 単位系における電気的量の変換にはアンペールの法則を用いる。cgs-esu 単位系の時の (4.2.16) の様に MKSA 単位系の場合に 4π を付けて

$$\oint_C \boldsymbol{H}_2 \cdot d\boldsymbol{\ell} = 4\pi I_2 \tag{4.3.6}$$

とすると、$\boldsymbol{H}_2 = (1/\sqrt{k_m})\boldsymbol{H}$ より

$$I_2 = 1/(4\pi\sqrt{k_m})I \tag{4.3.7}$$

そこで、Wb/(dyn$^{1/2}$ cm)=Nm/(C/s dyn$^{1/2}$ cm)=10^7 dyn$^{1/2}$/A より (4.2.2) から

$$1/(4\pi\sqrt{k_m}) = 10^{-8}\ \mathrm{Wb/(dyn^{1/2}cm)} = 1/10\ \mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{A} \tag{4.3.8}$$

だから、$I = 1$ A に対して

$$I_2 = 1/(4\pi\sqrt{k_m})\ (1\ \mathrm{A}) = 1/10\ \mathrm{dyn}^{1/2} = 1/10\ \mathrm{emA} \tag{4.3.9}$$

が対応する。1 dyn$^{1/2}$=1 emA を electro-magnetic Ampare という。ここから電荷の単位は 1 dyn$^{1/2}$ s=1 emC=10/c C となる。また

$$q_2 = 1/(4\pi\sqrt{k_m})q \tag{4.3.10}$$

と $F = qE = q_2E_2$ より

$$E_2 = 4\pi\sqrt{k_m}E \tag{4.3.11}$$

そこで $q = 1$ C に対しては $q_2 = 1/10$ emC、また $E = 1$ N/C に対して

$$E_2 = (4\pi\sqrt{k_m})\ (1\ \mathrm{N/C}) = 10^6\ \mathrm{dyn}^{1/2}/\mathrm{s} \tag{4.3.12}$$

つまり cgs-emu 単位系における電場の強さの単位は 1 $\mathrm{dyn}^{1/2}$/s=1 dyn/emC である。起電力 Ω_2 は (4.3.11) の $\boldsymbol{E}_2$ の変換にならって

$$\Omega_2 = 4\pi\sqrt{k_m}\Omega \tag{4.3.13}$$

となるが、これは (4.1.23), (4.1.24) を通じて $\boldsymbol{B}_2$, Φ_2 の変換と consistent である。従って $\Omega = 1$ V=1 J/C に対して

$$\Omega_2 = 4\pi\sqrt{k_m}\ (1\ \mathrm{V}) = 10^8 hboxerg/(\mathrm{dyn}^{1/2}\mathrm{s} = 10^8\ \mathrm{emV} \tag{4.3.14}$$

ここに 1 emV=1 erg/emC=1 erg/($\mathrm{dyn}^{1/2}$ s) は cgs-emu 単位系における起電力 (電圧) の単位である。$q = 1$ C に対して $q_2 = 1/10$ C より、$q_2\Omega_2 = 10^7$ erg=1 J となって元へ戻る。

二本の導線に働く力は MKSA の時 (4.1.17) だから (4.3.7) を用いて $I_1 = 4\pi\sqrt{k_m}(I_1)_2$, $I_2 = 4\pi\sqrt{k_m}(I_2)_2$ より

$$F = \frac{2\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 I_2}{r} = 2\mu_0 4\pi k_m \frac{(I_1)_2(I_2)_2}{r} = 2\frac{(I_1)_2(I_2)_2}{r} \tag{4.3.15}$$

より $(I_1)_2 = (I_2)_2 = 1$ emA=1 $\mathrm{dyn}^{1/2}$, $r = 1$ cm の時、$dF/d\ell = 2$ dyn/cm となる。また cgs-emu 単位系での静電気クーロン は、$q_2 = 1/(4\pi\sqrt{\ } k_m)q$ より (4.1.10) を使って

$$F = kqQ/r^2 = (4\pi)^2 k k_m q_2 Q_2/r^2 = c^2 q_2 Q_2/r^2 \tag{4.3.16}$$

だから、$q_2 = Q_2 = 1$ emC, $r = 1$ cm に対して

$$F = c^2\ (1\ \mathrm{emC/cm})^2 = (c\ \mathrm{dyn}^{1/2}\mathrm{s/cm})^2 = |c|^2\ \mathrm{dyn} \sim 9\times 10^{20}\ \mathrm{dyn} \tag{4.3.17}$$

となる。

電束密度に対しては、(4.1.8) に 4π を付けて

$$\oint_S \boldsymbol{D}_2 \cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi Q_2 \tag{4.3.18}$$

とすると (4.3.10) より

$$\boldsymbol{D}_2 = (1/\sqrt{k_m})\boldsymbol{D} \tag{4.3.19}$$

そこで $D = 1$ C/m^2 に対して

$$D_2 = 4\pi\times 10^{-5}\ \mathrm{dyn}^{1/2}s/\mathrm{cm}^2 = 4\pi\times 10^{-5}\ \mathrm{emC/cm}^2 \tag{4.3.20}$$

そこで、cgs-emu 単位系における電束密度の単位は emC/cm^2、電束の単位は emC である。また $\boldsymbol{D}_2$ と $\boldsymbol{E}_2$ の関係は (4.1.10) を用いて

$$\boldsymbol{D}_2 = (1/\sqrt{k_m})\varepsilon_0\ (1/4\pi\sqrt{k_m})\boldsymbol{E}_2 = \varepsilon_0\mu_0\boldsymbol{E}_2 = (1/c^2)\boldsymbol{E}_2 \tag{4.3.21}$$

これは (4.1.10) で $\mu_0 = 1, \varepsilon_0 = (1/c^2)$ とおくことに対応する。

Maxwell 方程式は

$$\begin{aligned}
\text{div } \boldsymbol{B}_2 &= 0 \\
\text{rot } \boldsymbol{E}_2 &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}_2}{\partial t} \\
\text{div } \boldsymbol{D}_2 &= 4\pi\rho_2 \\
\text{rot. } \boldsymbol{H}_2 &= 4\pi\boldsymbol{j}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{D}_2}{\partial t}
\end{aligned} \tag{4.3.22}$$

となる。

4.4 cgs-ガウス単位系

基本的には、電気量部分=cgs-esu 単位系で 磁気量部分=cgs-emu 単位系を利用する。すなわち、cgs-ガウス単位系における電荷、電場の強さ、起電力・電位 (または電圧)、電束の単位は cgs-esu 単位系と同じ esu (または Fr、stC)、dyn/esu、stV、esu であり、磁荷、磁場の強さ、起磁力・磁位、磁束の単位は cgs-emu 単位系と同じ Mx、Oe、Gb、G (Gauss)、Mx である。

問題は電気量と磁気量が混ざる場合で、レンツの法則やアンペールの法則、ローレンツ力の式がこれに対応する。まず (4.2.30) や (4.3.22) の Maxwell 方程式から出発すると、$\boldsymbol{H}_1$ を $\boldsymbol{H}_2$、$\boldsymbol{E}_2$ を $\boldsymbol{E}_1$ で表わす必要がある。これらは前節の結果から

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_1 &= 4\pi\sqrt{k}\boldsymbol{H} = 4\pi\sqrt{k}\sqrt{k_m}\boldsymbol{H}_2 = c\boldsymbol{H}_2 \\
\boldsymbol{E}_2 &= 4\pi\sqrt{k_m}\boldsymbol{E} = 4\pi\sqrt{k_m}\sqrt{k}\boldsymbol{E}_1 = c\boldsymbol{E}_1
\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

そこで cgs-ガウス単位系の Maxwell 方程式として

$$\begin{aligned}
\text{div } \boldsymbol{B}_2 &= 0 \\
\text{rot } \boldsymbol{E}_1 &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}_2}{\partial t}
\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

$$\begin{aligned}
\text{div } \boldsymbol{D}_1 &= 4\pi\rho_1 \\
\text{rot } \boldsymbol{H}_2 &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_1 + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}_1}{\partial t}
\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

となる。この場合 $\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{H}_2$, $\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{E}_1$ であるから、これらは以前の (3.5.1), (3.5.2) と同じである。レンツの法則は (4.4.1) より

$$\int_C \boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{\cdot}\, d\boldsymbol{\ell} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{\cdot}\, \boldsymbol{S} \tag{4.4.4}$$

と $(1/c)$ がつく。またアンペールの法則は (4.2.16) と (4.4.1) から

$$\oint_C \boldsymbol{H}_2 \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{4\pi}{c} I_1 \tag{4.4.5}$$

MKSA 単位系におけるローレンツ力の式 (4.1.16) は、$q_1 = \sqrt{k}q$, $\boldsymbol{B}_1 = (1/\sqrt{k})\boldsymbol{B}$ (see (4.2.22) より cgs-esu 単位系では $\boldsymbol{F} = q_1\boldsymbol{E}_1 + q_1\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_1$ であるが、cgs-ガウス単位系では $\boldsymbol{B}_2 = 4\pi\sqrt{k_m}\boldsymbol{B}$ より

$$\boldsymbol{B}_2 = 4\pi\sqrt{k_m}\sqrt{k}\boldsymbol{B}_1 = c\boldsymbol{B}_1 \tag{4.4.6}$$

だから

$$\boldsymbol{F} = q_1\boldsymbol{E}_1 + \frac{1}{c}q_1\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_2 \tag{4.4.7}$$

となる。

定常電流が流れる二本の導線に働く力については、多少注意を要する。この場合電流しか現れないわけだから、cgs-ガウス単位系の公式は cgs-esu 単位系の場合と同じ (4.2.27) である。他方 cgs-emu 単位系では (4.3.15) で見た様に $(1/c^2)$ がない。一方、電流の単位は cgs-esu 単位系では 1 stA=dyn$^{1/2}$ cm/s、cgs-emu 単位系では c^2 がなく 1 emA=dyn$^{1/2}$ である。そこで 1 abA=c emA=c dyn$^{1/2}$ $= |c|$ stA を cgs-gauss 単位系の電流の単位として用いると、$(I_1)_1 = (I_2)_1 = 1$ abA $= |c|$ stA, $r = 1$ cm に対して

$$dF/d\ell = 2\frac{1}{c^2}\ (1\ \mathrm{abA})^2/\mathrm{cm} = 2\ \mathrm{dyn/cm} \tag{4.4.8}$$

となる。電荷の保存の式 (3.1.4) は $q_1 = \sqrt{k}q$, $I_1 = \sqrt{k}I$ 等より、どんな単位系でも同じである。例えば cgs-esu 単位系では

$$\mathrm{div}\boldsymbol{j}_1 + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0 \tag{4.4.9}$$

であるが、cgs-ガウス単位系の時 $I_1 = 1$ abA を使っても良いが、その場合は ρ_1 に対して

$$\rho_1 = 1\ \mathrm{abC} = |c|\ \mathrm{stC} = |c|\ \mathrm{dyn}^{1/2}\mathrm{cm} = c\$\mathrm{dyn}^{1/2}\mathrm{s} = c\ \mathrm{emC} \tag{4.4.10}$$

を使わなければならない。$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{D}_1$ や stV 等についても factor $|c|$ だけの違いが生じる。

間違いやすい変換の一例として、ここでは MKSA 単位系の Wb と cgs-emu 単位系の emWb を考える。1 Wb を cgs-esu 単位系で表わすと A=C/s より

$$\begin{aligned}1\ \mathrm{Wb} &= 1\ \mathrm{Nm/A} = 1\ \mathrm{Nms/C} = 10^7\ \mathrm{dyn\ cm\ s}/(|c|/10\ \mathrm{esu}) \\ &= 10^8/|c|\ \mathrm{dyn}^{1/2}\mathrm{s} = 10^8/c\ \mathrm{dyn}^{1/2}\mathrm{cm}x \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

一方 (4.3.1) のところで見た様に、$q_m = 1$ Wb に対しては

$$\begin{aligned}(q_m)_2 &= \sqrt{k_m} q_m = \sqrt{k_m}\ (1\ \mathrm{Wb}) \\ &= (c/4\pi)(10^8/c)\ \mathrm{dyn}^{1/2}\mathrm{cm} \\ &= 10^8/4\pi\ \mathrm{dyn}^{1/2}\mathrm{cm}\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

と $c \to 4\pi$ だけ違う！ 前節で見た様に、cge-emu 単位系や cgs-ガウス単位系の磁荷量の単位は 1 emWb=1 Mx=1 dyn$^{1/2}$ cm であるが、(**??**) を 1 Wb=$10^8/c$ emWb と書いたとしてもこれは MKSA 単位系の 1 Wb を emWb で書いたというだけで、これを他の単位系での関係式で使って良い事にはならない。正しくは、(4.4.12) の様に MKSA 単位系での 1 Wb が cgs-emu 単位系での $(q_m)_2 = 10^8/4\pi$ emWb (Mx) に ”対応する” というだけである。即ち、(**??**) と (4.4.12) は双方とも間違いではないが、(**??**) の $q_m = 1$ Wb と (4.4.12) の $(q_m)_2$ は数値のみならず次元も全く違う全然別の物理量を見ているのである。同様に (**??**) を cgs-esu 単位系の磁荷の単位 1 stWb=$(1/4\pi)$ dyn$^{1/2}$ s で表わすと、$q_m = 1\ \mathrm{Wb} = 4\pi \times 10^8/|c|$ stWb だが、(4.2.21) にある様に $(q_m)_1 = 10^8/|c|$ stWb である。単位系が違えば物理法則を表わす関係式も違ってくる。これこそが、電磁気学の単位系の議論を難しくしている理由である。

この様な問題は、電荷については起こっていない。すなわち MKSA 単位系の 1 C は、cgs-esu 単位系と cgs-emu 単位系の電荷の単位 1 esu=1 dyn$^{1/2}$ cm と 1 emC=1 dyn$^{1/2}$ s、および 1 abC=$|c|$ stC=c emC を用いて

$$\begin{aligned}q &= 1\ \mathrm{C} = |c|/10\ \mathrm{dyn}^{1/2}\mathrm{cm} = c/10\ \mathrm{dyn}^{1/2}\mathrm{s} \\ &= |c|/10\ \mathrm{esu} = c/10\ \mathrm{emC} = 1/10\ \mathrm{abC}\end{aligned} \tag{4.4.13}$$

と書けるが、各単位系での対応する電荷は (4.2.5) と (4.3.10) より

$$\begin{aligned}q_1 &= |c|/10\ \mathrm{esu} \quad \mathrm{wth} \quad 1\ \mathrm{esu} = 1\ \mathrm{dyn}^{1/2}\mathrm{cm} \\ q_2 &= c/10\ \mathrm{emC} \quad \mathrm{with} \quad 1\ \mathrm{emC} = 1\ \mathrm{dyn}^{1/2}\mathrm{s}\end{aligned} \tag{4.4.14}$$

となる。cgs-ガウス単位系での q_2 はまた $q_2 = 1/10$ abC である。しかしながら、1 stA=1 dyn$^{1/2}$ cm/s より 1 stA stWb=$(1/4\pi)$ erg、1 emA= 1 dyn$^{1/2}$ より 1 emA emWb=1 erg である。

最後に MKSA 単位系における各物理量の定義と、各 cgs 単位系の MKSA 単位系からの変換則とその単位、変換係数を表 1 - 3 にまとめておく。

表 1　MKSA 単位系における各物理量の定義と cgs-esu 単位系への変換則

物理量	記号	名称	単位	cgs-esu への変換則
電荷	q, Q	クーロン (C)	C	$q_1 = \sqrt{k}q$
電流	I	アンペア (A)	A=Cs	$I_1 = \sqrt{k}I$
電圧 (起電力)	Ω	ボルト (V)	V=(N/C)m=J/C	$\Omega_1 = (1/\sqrt{k})\Omega$
電場の強さ	$\boldsymbol{E}$	-	N/C	$\boldsymbol{E}_1 = (1/\sqrt{k})\boldsymbol{E}$
電束	-	電荷 (C)	-	
電束密度	$\boldsymbol{D}$	-	C/m^2	$\boldsymbol{D}_1 = 4\pi\sqrt{k}\boldsymbol{D}$
磁荷 (磁気量)	q_m, Q_m	ウェーバー (Wb)	Wb=Vs=J/A	$(q_m)_1 = 1/(4\sqrt{k})q_m$
磁場の強さ	$\boldsymbol{H}$	-	N/Wb=A/m	$H_1 = 4\pi\sqrt{k}H$
磁束	Φ	磁荷 (Wb)	Wb	-
磁束密度	$\boldsymbol{B}$	テスラ (T)	T=Wb/m^2	$\boldsymbol{B}_1 = (1/\sqrt{k})\boldsymbol{B}$
起磁力	-	-	N/Wb m=J/Wb=A	-

表 2　cgs-esu 単位系と cgs-emu 単位系の MKSA 単位系からの変換則

[MKSA 単位系]			[cgs-esu 単位系]	[cgs-emu 単位系]
物理量	記号	名称	esu 系への変換則	emu 系への変換則
電荷	q, Q	クーロン (C)	$q_1 = \sqrt{k}q$	$q_2 = 1/(4\pi\sqrt{k_m})q$
電流	I	アンペア (A)	$I_1 = \sqrt{k}I$	$I_2 = 1/(4\pi\sqrt{k_m})I$
電圧 (起電力)	Ω	ボルト (V)	$V_1 = 1/\sqrt{k}V$	$V_2 = 4\pi\sqrt{k_m}V$
電場の強さ	$\boldsymbol{E}$	-	$E_1 = 1/\sqrt{k}E$	$E_2 = 4\pi\sqrt{k_m}E$
電束	-	電荷 (C)	-	-
電束密度	$\boldsymbol{D}$	-	$D_1 = 4\pi\sqrt{k}D$	$D_2 = (1/\sqrt{k_m})D$
磁荷 (磁気量)	q_m	ウェーバー (Wb)	$(q_m)_1 = 1/(4\pi\sqrt{k})q_m$	$(q_m)_2 = \sqrt{k_m}q_m$
磁場の強さ	$\boldsymbol{H}$	-	$H_1 = 4\pi\sqrt{k}H$	$H_2 = 1/\sqrt{k_m}H$
磁束	Φ	磁荷 (Wb)	$\Phi_1 = 1/\sqrt{k}\Phi$	$\Phi_2 = 4\pi\sqrt{k_m}\Phi$
磁束密度	$\boldsymbol{B}$	テスラ (T)	$B_1 = 1/\sqrt{k}B$	$B_2 = 4\pi\sqrt{k_m}B$
起磁力	-	-	$I_1 = \sqrt{k}I$	$I_2 = 1/(4\pi\sqrt{k_m})I$

表 3　cgs-ガウス単位系の MKSA 単位系からの変換則と各物理量の単位、及び単位の換算則

[MKSA 単位系]			[cgs-ガウス単位系]		
物理量	記号	単位	ガウス系への変換則	単位	単位の換算
電荷	q, Q	C	$q_1 = \sqrt{k}q$	esu=Fr=dyn$^{1/2}$ cm	$\lvert c\rvert/10$
電流	I	A	$I_1 = \sqrt{k}I$	stA=dyn$^{1/2}$ cm/s	$\lvert c\rvert/10$
電圧 (起電力)	Ω	V	$\Omega_1 = (1/\sqrt{k})\Omega$	stV=dyn$^{1/2}$	$10^8/\lvert c\rvert$
電場の強さ	$\boldsymbol{E}$	N/C	$E_1 = (1/\sqrt{k})E$	dyn$^{1/2}$/cm	$10^6/\lvert c\rvert$
電束	-	C	-	esu	$4\pi\lvert c\rvert/10$
電束密度	$\boldsymbol{D}$	C/m^2	$D_1 = 4\pi\sqrt{k}D$	esu/cm^2	$4\pi\lvert c\rvert \times 10^{-5}$
磁荷 (磁気量)	q_m	Wb	$(q_m)_2 = \sqrt{k_m}q_m$	emWb=dyn$^{1/2}$ cm	$(1/4\pi) \times 10^8$
磁場の強さ	$\boldsymbol{H}$	N/Wb	$H_2 = (1/\sqrt{k_m})H$	Oe=dyn$^{1/2}$ /cm	$4\pi \times 10^{-3}$
磁束	Φ	Wb	$\Phi_2 = 4\pi\sqrt{k_m}\Phi$	Mx=emWb	10^8
磁束密度	$\boldsymbol{B}$	Wb/m^2	$B_2 = 4\pi\sqrt{k_m}B$	Gauss=Mx/cm^2	10^4
起磁力	-	A	$I_2 = 1/(4\pi\sqrt{k_m})I$	Gb=Oe cm=dyn$^{1/2}$	$4\pi/10$

4.5 電磁気学の単位系の統一的記述

この節では、Wikipedia での電磁気学の単位系の記述に従って、いずれの単位系でも使える物理法則の統一的記述を試みる。まず、一般に真空の電磁気学の単位は三つの自由度を持っている。これらを λ,γ, ε_0, μ_0 と書くと、(4.1.10) の電磁波の (位相) 速度が c であるという条件は

$$\varepsilon_0\mu_0 = \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2 \tag{4.5.1}$$

と表わされる。これらを使うと電磁気学の諸関係式は以下の様に書ける。まず、電荷と磁荷に関するクーロンの法則は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= k\frac{qQ}{r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2} \\
&= q\boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{E} &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\boldsymbol{e}_r \\
\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} &= \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{E}\ dV = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}Q = \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\int_V \rho\ dV \\
\mathrm{div}\ \boldsymbol{E} &= \frac{\lambda}{\varepsilon_0}\rho
\end{aligned} \tag{4.5.2}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \frac{\lambda}{4\pi\mu_0}\frac{q_m Q_m}{r^2} \\
&= q_m\boldsymbol{H} \\
\boldsymbol{H} &= \frac{\lambda}{4\pi\mu_0}\frac{Q_m}{r^2}\boldsymbol{e}_r \\
\int_S \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{S} &= \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{H}\ dV = \frac{\lambda}{\mu_0}Q_m = \frac{\lambda}{\mu_0}\int_V \rho_m\ dV \\
\mathrm{div}\ \boldsymbol{H} &= \frac{\lambda}{\mu_0}\rho_m
\end{aligned} \tag{4.5.3}$$

電場の強さ $\boldsymbol{E}$、磁場の強さ $\boldsymbol{H}$ と電束密度 $\boldsymbol{D}$、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ との間の関係は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D} &= \varepsilon_0\boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{B} &= \mu_0\boldsymbol{H}
\end{aligned} \tag{4.5.4}$$

起電力に関するレンツの法則と電磁誘導の Maxwell 方程式は

$$
\begin{aligned}
\Omega &= \int_C \boldsymbol{E} \cdot dbl = \int_S \mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} \\
&= -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} \\
\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (4.5.5)
\end{aligned}
$$

$$(4.5.6)$$

起磁力に関するアンペールの法則は

$$
\begin{aligned}
\int_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} &= \int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{\lambda}{\gamma} I \\
&= \frac{\lambda}{\gamma}\int_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S} \qquad (4.5.7)
\end{aligned}
$$

である。この式は下の (4.5.10) 式からでる。電荷の保存の式 (3.1.4) に (4.5.2), (4.5.4) からの ρ を代入して得られる変位電流を加えて、Maxwell 方程式の最後の式は従って

$$
\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H} = \frac{\lambda}{\gamma}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad (4.5.8)
$$

となる。

次に定常電流の作る電場に関するビオ・サバールの法則を

$$
d\boldsymbol{H} = \frac{\lambda}{4\pi\gamma}\frac{\boldsymbol{I} d\ell \times \boldsymbol{r}}{r^3} \qquad (4.5.9)
$$

とすると、無限に伸びた導線を流れる定常電流による導線周りの磁場は

$$
H = \frac{\lambda}{4\pi\gamma}\frac{2I}{r} = \frac{\lambda}{\gamma}\frac{I}{2\pi r} \qquad (4.5.10)
$$

また、半径 r の円環電流 I によって中心部に作られる磁場の強さ H は

$$
H = \frac{\lambda}{\gamma}\frac{I}{2r} \qquad (4.5.11)
$$

単位長さあたり n 回巻いたソレノイドに流した電流 I の作るソレノイド内の磁場の強さ H は

$$
H = \frac{\lambda}{\gamma} nI \qquad (4.5.12)
$$

表 4　MKSA, cgs-esu, cgs-emu, cgs-ガウス単位系におけるパラメータの値、ここに $\varepsilon_0\mu_0 = (\gamma/c)^2$

単位系	λ	γ	ε_0	μ_0
MKSA	1	1	$(1/c^2\mu_0)$	$4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2
cgs-esu	4π	1	1	$1/c^2$
cgs-emu	4π	1	$1/c^2$	1
cgs-ガウス	4π	c	1	1

となる。ローレンツ力は、電場 $\boldsymbol{E}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ 内の磁場を速度 $\boldsymbol{v}$ で走る電荷 q を持った荷電粒子の受ける力である。これは

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + \frac{1}{\gamma}q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{4.5.13}$$

と表わされる。ここで、$\boldsymbol{E} = 0$, $q\boldsymbol{v} \to \rho\boldsymbol{v} = \boldsymbol{j}$ として断面積 S, 長さ $d\ell$ の導線に働く力を $d\boldsymbol{F}$ とすると、$\boldsymbol{j}S = \boldsymbol{I}$ として $d\boldsymbol{F} = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{I}d\ell \times \boldsymbol{B}$ となる。これと (4.5.10) とを組み合わせて $\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$ を使うと、二つの平行に伸びた導線を流れる電流 I_1, I_2 によってもたらされる導線の間に働く力は

$$\begin{aligned}\frac{dF}{d\ell} &= \frac{1}{\gamma}I_1\ \mu_0\frac{\lambda}{4\pi\gamma}\frac{2I_2}{r} \\ &= 2\frac{\lambda\mu_0}{4\pi\gamma^2}\frac{I_1I_2}{r}\end{aligned} \tag{4.5.14}$$

となる。これらの標識におけるパラメータ $\lambda, \gamma, \varepsilon_0, \mu_0$ の値は、各単位系について表 4 のようになる。

各パラメータの意味は次の通りである。まず λ は有理化因子と呼ばれ、Maxwell 方程式が余分な 4π という立体角因子を持たず、最も簡単になるように選ばれる。MKSA 単位系では $\lambda = 1$ でありその様な条件を満たすが 、一方クーロン係数 k と k_m に $\frac{1}{4\pi}$ が現われる。この場合、閉じた二次元表面から流れ出る電束 や磁束の総量はその二次元表面内に含まれる電荷や磁荷の総量に一致する。従って、当然「電荷の単位=電束の単位=C」かつ「磁荷の単位= 磁束の単位=Wb」である。電束密度 $\boldsymbol{D}$ や磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の単位は C/m^2 や Wb/m^2=Tesla である。一方、表 1 にある cgs 単位系では全て $\lambda = 1$ である。この場合、単位としては「電荷の単位=電束の単位」、「磁荷の単位= 磁束の単位」であること

には違いがないが、電束、磁束の大きさは電荷、磁荷の総量の 4π 倍になる。電束密度 $\boldsymbol{D}$ や磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の単位は電束 (電荷) や磁束 (磁荷) の単位を cm^2 で割ったものである。例えば、既に見た様に cgs-esu 単位系では $k=1, \gamma=1, \varepsilon_0=1$ であるので (4.5.1) から $\mu=1/c^2$ であり、磁荷の対するクーロンの法則は $F=c^2\frac{q_m Q_m}{r^2}$ となる。この単位系では、次に電流の単位を 1 stA= 1 esu/s と定義し、C と esu のかなり ad hoc な関係式 1 C=$|c|$/10 esu から、1 A と 1 stA の関係 1 A=$|c|$/10 stA を導いたのであった。二本の導線間の力は (4.5.14) から、cgs-esu 単位系と cgs-ガウス単位系で同じであるが、1 stA の電流が流れる 1 cm 離れた 2 本の導線の単位長さあたりに働く力は

$$\begin{aligned}\frac{dF}{d\ell} &= 2\frac{1}{c^2}\frac{I_1 I_2}{r} = 2\frac{1}{c^2}(\mathrm{stA})^2/\mathrm{cm} = 2\frac{1}{|c|^2}\mathrm{dyn/cm}\\ &= 2/(2.99792\cdots)^2 \times 10^{-20}\mathrm{dyn/cm}\\ &= 2.2225\cdots\times 10^{-21}\mathrm{dyn/cm}\end{aligned} \tag{4.5.15}$$

と非常に小さいものとなる。しかし、1 stA の代わりに 1 abA=$|c|$ stA=10 A を使うと 1 cm あたり 2 dyn であり、まともな大きさになる。更に、1 stWb の大きさの単位磁荷を 1 cm だけ離れたところに置いた時のクーロン力は、1 stWb=1 $\mathrm{dyn}^{1/2}$ s だから (4.5.1) と (4.5.3) とから

$$\begin{aligned}F &= c^2\ (\mathrm{stWb/cm})^2 = c^2\ \mathrm{dyn(s/cm)}^2 = |c|^2\ \mathrm{dyn}\\ &\sim 9\times 10^{20}\ \mathrm{dyn}\end{aligned} \tag{4.5.16}$$

と非常に大きな力となる。

一方、cgs-emu 単位系では $k_m=1, \gamma=1, \mu_0=1$ より $\varepsilon_0=1/c^2$ であり電気的量と磁気的量の役割が cgs-esu 単位系とは逆になる。歴史的には、静磁場の理論より定常電流の作る磁場の実験が先行したことにも関係して、まず ビオ・サバールの法則 (4.5.9) が係数を全く含まないかたちで定式化された。1 cm 離れたとこに置いた 2 本の導線に働く力 (4.5.14) もまた無係数で

$$\frac{dF}{d\ell} = \frac{2}{r}I_1 I_2 \tag{4.5.17}$$

となる。1 cm あたりの導線に働く力を 2 dyn とすることで、電流の単位を現代的な記法で 1 emA とすると 1 emA=1 $\mathrm{dyn}^{1/2}$ となる。cgs-emu 単位系における電荷の単位を 1 emC=1 emA s=1 $\mathrm{dyn}^{1/2}$ s として、これを 1 esu=1 stC=1 $\mathrm{dyn}^{1/2}$ cm と比較することで

$$q = 1\ \mathrm{C} = |c|/10\ \mathrm{esu} = c/10\ \mathrm{emC} = 1/10\ \mathrm{abC} \tag{4.5.18}$$

が得られる。これらは前節で見た様に、cgs-esu 単位系や cgs-emu 単位系にける 1 C に対応する $q_1 = |c|/10$ esu や $q_2 = c/10$ emC と同じであるが、q, q_1, q_2 は全て別の物理量と考えるべきである。同様に、MKSA 単位系の 1 A は cgs-emu 単位系の $c/10$ emA に対応する。この単位系では $\mu_0 = 1$ であるので、磁場の強さと磁束密度との区別はなく $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}$ であり、それらの単位は磁荷の単位を 1 emWb=1 erg/emA=1 dyn$^{1/2}$ cm として 1 dyn/emWb=1 emA/cm=1 emWb/cm^2 となる。ここから 1 (emWb/cm)^2 = 1 dyn より、1 cm 離れた二つの単位磁荷 1 emWb の間に働くクーロン力の大きさは $F = q_m Q_m / r^2$ の示す通り 1 dyn である。MKSA 単位系における Wb と emWb は (4.4.12) 式で結びついてる。他方、1 cm 離れたところに置いた cgs-emu 単位系における二つの単位電荷 (1 emC=1 dyn$^{1/2}$ s) に働くクーロン力は

$$\begin{aligned} F &= c^2 \ (\mathrm{emC/cm})^2 = c^2 \ \mathrm{dyn(s/cm)}^2 = |c|^2 \ \mathrm{dyn} \\ &\sim 9 \times 10^{20} \ \mathrm{dyn} \end{aligned} \tag{4.5.19}$$

となり、cgs-esu 単位系における単位磁荷間の力 (4.5.16) と全く同じで非常に大きな力となる。一方、cgs-ガウス単位系では 1 cm 離れた単位電荷、単位磁荷間のクーロン力はいずれも 1 dyn となる。

5 電磁波

5.1 Maxwell 方程式の解

電荷と電流のない場合、真空中の Maxwell 方程式の解を求めてみよう。この場合 cgs-ガウス単位系では (3.5.1), (3.5.2) から $\rho = 0$, $\boldsymbol{j} = 0$ とおいて

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\ \boldsymbol{H} &= 0 \\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{E} &= 0 \\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Maxwell 方程式のところで既に述べた様に、電場と磁場 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ を電磁場のスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル φ, $\boldsymbol{A}$ を使って

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\mathrm{grad}\ \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\ \boldsymbol{H} &= \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

と書けば便利である。ポテンシャルに対する運動方程式は

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{(Lorentz condition)} \\
&\Box \varphi = 0 \\
&\Box \boldsymbol{A} = 0
\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

となる。一般には φ と $\boldsymbol{A}$ は共に $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と t の関数であるが、ここではまずこれらが x と t だけの関数と考えて解を求める。この時 (5.1.3) は

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{(Lorentz condition)} \\
&\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{(\partial t)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x)^2}\right)\varphi = 0 \\
&\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{(\partial t)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x)^2}\right)\boldsymbol{A} = 0
\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

となる。まずはじめにスカラーポテンシャル φ の運動方程式 (波動方程式という) を考える。今の場合ダランベリアン (3.5.12) は

$$\begin{aligned}
\Box &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{(\partial t)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} \\
&= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)
\end{aligned} \tag{5.1.5}$$

と書けるので $\xi = x - ct, \eta = x + ct$ により変数 x, t から ξ, η に移ると $\Box = 4\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} = 4\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi}$ より、(**??**) の φ の波動方程式は $\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\varphi(\xi, \eta) = 0$ あるいは $\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi}\varphi(\xi, \eta) = 0$ となる。まず $\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi}\varphi(\xi, \eta) = 0$ と仮定してみよう。まず η で積分して

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\varphi(\xi, \eta) = C_1'(\xi) \tag{5.1.6}$$

そこで、もう一度 ξ で積分して

$$\begin{aligned}
\varphi(\xi, \eta) &= \int^{\xi} C_1'(\xi)\xi + C_2(\eta) \\
&= C_1(\xi) + C_2(\eta)
\end{aligned} \tag{5.1.7}$$

ここに、$C_1(\xi)$ と $C_2(\eta)$ はそれぞれ ξ と η だけの任意の関数である。また、$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\varphi(\xi, \eta) = 0$ から出発しても同じ結果が得られる。ξ, η を元へ戻すと、φ の波動方程式の解として

結局

$$\varphi(x,t) = \varphi_1(x-ct) + \varphi_2(x+ct) \tag{5.1.8}$$

が得られる。ここに、右辺第一項目は波動方程式

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x-ct) = 0 \tag{5.1.9}$$

の解であり、第二項目は $c \to -c$ としたものである。(5.1.9) の解は $c > 0$ の時、$t \to t+\Delta t$ とした時に $\Delta x = c\Delta t$ として $x \to x + \Delta x$ とすれば $x - ct$ が元へ戻る事により、(位相) 速度 c で伝わる進行波という。それに対して、(5.1.8) の二項目は後退波と呼ばれる。これらは波動方程式 (5.1.4) の互いに独立な街である。同様にベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(x,t)$ の一般解も

$$\boldsymbol{A}(x,t) = \boldsymbol{A}_1(x-ct) + \boldsymbol{A}_2(x+ct) \tag{5.1.10}$$

と書ける。まずはじめに、$\varphi(x-ct)$ と $\boldsymbol{A}(x-ct)$ だけの進行波を考える。この時 (5.1.4) の Lorentz 条件は

$$\frac{\partial}{\partial x}A_x(x-ct) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x-ct) = \dot{A}_x(x-ct) - \dot{\varphi(x-ct)} = 0 \tag{5.1.11}$$

ここに、$\dot{A}_x$ と $\dot{\varphi}$ の $\cdot$ はいずれも $A_x(x)$ と $\varphi(x)$ の x についての微分を表わす。すなわち (5.1.11) は、$A_x(x)$ と $\varphi(x)$ が (定数を除いて) 同じ関数形であることを意味する。$(A_x(x) = \varphi(x) + const.)$ この性質を使うと、電場と磁場は (5.1.2) より

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x-ct) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A_x(x-ct) = -\dot{\varphi}(x-ct) + \dot{A}_x(x-ct) = 0 \\
E_y &= \dot{A}_y(x-ct) \\
E_z &= \dot{A}_z(x-ct) \\
H_x &= 0 \\
H_y &= -\dot{A}_z(x-ct) \\
H_z &= \dot{A}_y(x-ct)
\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

が得られる。ここから、ベクトル $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ は波の進行方向である x-軸と垂直方向の x-y 平面内にあり、互いに大きさが等しく直交している事がわかる。

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{H}| &= \sqrt{(\dot{A}_y(x-ct))^2 + (\dot{A}_z(x-ct))^2} \\
(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}) &= E_yH_y + E_zH_z = 0 \\
[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}] &= |\boldsymbol{E}||\boldsymbol{H}|\boldsymbol{n}
\end{aligned} \tag{5.1.13}$$

ここに、$\boldsymbol{n}$ は x-軸方向の単位ベクトルである。すなわち、電磁波は進行方向 $\boldsymbol{n}$ と垂直に電場と磁場が振動する横波である。今簡単のため $A_y(x) = A(x), A_z(x) = 0$ とすると、ベクトル $\boldsymbol{E}$ の方向を y-軸方向に選ぶことが出来る。この時 $\boldsymbol{H}$ は z-軸方向を向く。

図 12: 電磁波の伝播　ここでは詳しいことは省略するが、電磁波は単位体積あたりの運動量とエネルギーを持った力学的実態である。すなわち、電磁波の運動量密度は $[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}]/(4\pi c)$、エネルギー密度は $(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{H}^2)/(8\pi)$ で与えられる。そこでこれらを (5.1.12) の解を用いて計算すると、$[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}]$ は x-方向を向いた大きさ $|\boldsymbol{E}|^2 = |\boldsymbol{H}|^2$ のベクトルであるので

$$\begin{aligned} \frac{[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}]}{4\pi c} &= \frac{(\dot{A}(x-ct))^2}{4\pi c}\boldsymbol{n} \\ \frac{(\boldsymbol{E})^2+(\boldsymbol{H})^2}{8\pi} &= \frac{(\dot{A}(x-ct))^2}{4\pi} \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

となる。エネルギー密度が運動量密度の大きさの c 倍であることは、後ほどアインシュタインの光量子仮説で重要な役割を演ずることとなる。また運動量密度の表式からは、壁に垂直に入射する電磁波は単位時間あたり単位面積に $\frac{(\dot{A}(x-ct))^2}{4\pi}$ の大きさの力を及ぼす事が分かる。これは、実験的にも確認されている。

今 $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ を座標ベクトルとして $x = \boldsymbol{nr}$ と書き、(5.1.12) を

$$\boldsymbol{E} = \dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{nr}-ct) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{nr}-ct) \tag{5.1.15}$$

と書くと、あとは全て (5.1.1) から求められる。例えば、$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0$ から $\boldsymbol{nE} = 0$ が導かれるし

$$\boldsymbol{H} = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{nr}-ct) = \boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{nr}-ct) = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{nr}-ct) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{nr}-ct) \tag{5.1.16}$$

となる。また (5.1.1) の 4 番目の式からは $\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n} = \boldsymbol{E}$ が導かれる。実際 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{nr}-ct)$ や $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{nr}+ct)$ は、(**??**) の中の 3 つの方程式を組み合わせて得られる波動方程式

$$\Box\boldsymbol{E} = \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{(\partial t)^2} - \Delta\right]\boldsymbol{E} = 0 \tag{5.1.17}$$

の解である。同じ事が磁場 $\boldsymbol{H}$ についても成り立っている。

電磁波の偏光現象について述べる前に、電磁気学でよく出て来る複素ベクトルについて少し整理しておこう。三次元ベクトルについて各成分が複素数の時、そのようなベクトルを複素ベクトルという。その様なベクトル $\boldsymbol{C}$ は、$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ を右手系の直交単位ベクトルとする時三つの複素成分 $C_x = A_x + iB_x, C_y = A_y + iB_y, C_z = A_z + iB_z$ で表わされ

る。すなわち

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C} &= C_x \boldsymbol{e}_x + C_y \boldsymbol{e}_y + C_z \boldsymbol{e}_z \\
&= (A_x + iB_x)\boldsymbol{e}_x + (A_y + iB_y)\boldsymbol{e}_y + (A_z + iB_z)\boldsymbol{e}_z \\
&= (A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y + A_z \boldsymbol{e}_z) + i(B_x \boldsymbol{e}_x + B_y \boldsymbol{e}_y + B_z \boldsymbol{e}_z) \\
&= \boldsymbol{A} + i\boldsymbol{B} \qquad (5.1.18)
\end{aligned}
$$

ここに $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{e}_x + A_y \boldsymbol{e}_y + A_z \boldsymbol{e}_z$ と $\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{e}_x + B_y \boldsymbol{e}_y + B_z \boldsymbol{e}_z$ は二つの三次元実ベクトルである。すなわち、一つの複素ベクトルは二つの実ベクトルと同値であり、その分解は一意的である。$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$ であったり $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \neq 0$ であったりすると、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ はそれらを含む一つの平面を定義しその法線方向 $\boldsymbol{n}$ (右手系とする) は $[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}] = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|(\sin\beta)\boldsymbol{n}$ から決まる。ここに β はベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角度で、$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\beta$ である。三次元複素ベクトルの独立成分は $A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z$ と 6 つあるが、これらは $|\boldsymbol{A}|, |\boldsymbol{B}|$ と β 及び $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{n}$ に結びついた三次元直交座標系を元の直交座標系から見た時の三次元オイラー角 (ψ, θ, ϕ) をとることも出来る。三次元複素ベクトルに複素数 $e^{i\theta}$ を掛けたものは再び三次元複素ベクトルであるが、その二つの実ベクトル成分は元の実ベクトル成分の線型結合で書ける。すなわち

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}' &= \boldsymbol{C}e^{i\theta} = (\boldsymbol{A} + i\boldsymbol{B})(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= (\boldsymbol{A}\cos\theta - \boldsymbol{B}\sin\theta) + i(\boldsymbol{A}\sin\theta + \boldsymbol{B}\cos\theta) \\
. &= \boldsymbol{A}' + i\boldsymbol{B}' \qquad (5.1.19)
\end{aligned}
$$

より行列演算の表式で

$$
\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}' \\ \boldsymbol{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \qquad (5.1.20)
$$

と表される。すなわち、新しい三次元実ベクトル $\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}'$ は再び元の三次元実ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の作る平面内にある。三次元複素ベクトルの大きさは $|\boldsymbol{C}| = \sqrt{\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^\dagger} = \sqrt{|\boldsymbol{A}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2}$ で与えられ、それは上の $e^{i\theta}$ を掛ける演算で不変である: $|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{C}'|$ 適当な $e^{i\theta}$ を掛ける事により二つの新しい実ベクトルを直交する様にすることが出来る。すなわち (5.1.20) から

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{B}') &= (|\boldsymbol{A}|^2 - |\boldsymbol{B}|^2)\sin\theta\cos\theta + (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\
&= -(|\boldsymbol{B}|^2 - |\boldsymbol{A}|^2)/2\sin 2\theta + (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\cos 2\theta \qquad (5.1.21)
\end{aligned}
$$

より θ を

$$
\tan 2\theta = \frac{2(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})}{|\boldsymbol{B}|^2 - |\boldsymbol{A}|^2} \qquad (5.1.22)
$$

を満たす様にとればよい。

(**??**) へ戻って、正弦波解

$$\boldsymbol{E} = \Re \boldsymbol{F} \sin k(\boldsymbol{nr} - ct) = \Re(\boldsymbol{F}_1 + i\boldsymbol{F}_2) e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)} \tag{5.1.23}$$

は特に重要である。ここに、$\boldsymbol{F}$ は実部 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ をもつ三次元複素ベクトル $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + i\boldsymbol{F}_2$ で、初期条件によって決まる定数ベクトルである。また $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{n}$ を波数ベクトル、$\omega = kc$ を角振動数という。$k = |\boldsymbol{k}| = (2\pi)/\lambda$ と書けば λ は波の波長 (wave length、$\nu = \omega/(2\pi)$ とすれば ν は振動数 (frequency: 周波数ともいう) であり

$$\lambda\nu = c \tag{5.1.24}$$

を満たす。ν は f とも書きその単位は Hz (ヘルツ) = (1/s) あるいは c (cycle: サイクル)、$T = 1/f$ を周期 (period) という。$\lambda f = c$ である。$\Delta|\boldsymbol{nr}| = \lambda, \Delta t = T$ で正弦波の位相 $\varphi = \boldsymbol{kr} - \omega t$ は 2π だけずれて 1 サイクルが終わる。既に見た様に

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + i\boldsymbol{F}_2 = (\boldsymbol{E}_1 - i\boldsymbol{E}_2) e^{i\alpha} \tag{5.1.25}$$

として、二つの三次元実ベクトル $\boldsymbol{E}_1$ と $\boldsymbol{E}_2$ が直交する様に出来る。(5.1.25) を $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 - i\boldsymbol{E}_2 = (\boldsymbol{F}_1 + i\boldsymbol{F}_2)e^{-i\alpha}$ と書いて

$$\tan 2\alpha = \frac{2(\boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{F}_2)}{|\boldsymbol{F}_1|^2 - |\boldsymbol{F}_2|^2} \tag{5.1.26}$$

とする事により

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_1 \\ \boldsymbol{E}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ \boldsymbol{F}_2 \end{pmatrix} \tag{5.1.27}$$

と表される。あるいは、これを逆に解く事により

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ \boldsymbol{F}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin -\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_1 \\ \boldsymbol{E}_2 \end{pmatrix} \tag{5.1.28}$$

が得られる。そこで (**??**) は (**??**) を使って $\varphi = \alpha + \boldsymbol{kr} - \omega t$ として

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \Re e\ (\boldsymbol{E}_1 - i\boldsymbol{E}_2) e^{i\alpha} e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)} = \Re e\ (\boldsymbol{E}_1 - i\boldsymbol{E}_2) e^{i\varphi} \\ &= \boldsymbol{E}_1 \cos\varphi + \boldsymbol{E}_2 \sin\varphi \end{aligned} \tag{5.1.29}$$

と表される。$\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2$ は互いに直交する定数ベクトルであるので、これらを x-軸、y-軸に選べば $|\boldsymbol{E}_1| = E_1, |\boldsymbol{E}_2| = E_2$ として

$$\boldsymbol{E}_x = E_1 \cos\varphi \quad , \quad \boldsymbol{E}_y = E_2 \sin\varphi \tag{5.1.30}$$

と表わされる。そこで、$E_1, E2 \neq 0$ の時

$$\left(\frac{\boldsymbol{E}_x}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{E}_y}{E_2}\right)^2 = 1 \tag{5.1.31}$$

が成り立つ。電磁波は、長軸・短軸 E_1, E_2 の楕円を描きながら螺旋状に波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向に進む。これを楕円偏光という。$E_1 = E_2$ の時は円偏光である。 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{k}$ の方向が右手系か左手系かに応じて右偏光の場合と左偏光の場合が存在する。$\boldsymbol{E}_1 = 0$ や $E_2 = 0$ の時は直線偏光という。直線偏光の光は、右円偏向の光と左円偏光の光を重ね合わせて得られる。

5.2 電磁波の分類

光が電磁波の一種であることは必ずしも自明なことではない。しかし、前節で示した Maxwell 方程式の解としての電磁波の伝播速度が、非常によい近似で光の速度に一致したことは光が電磁波であると信ずるに十分な根拠であったと考えられる。更に上で述べた偏光現象や光の反射・屈折現象、またそれまでに既に明らかにされていた白色光のスペクトル分解等を全て守備良く説明できた事により、このことはほぼ確実になった。最終的には、アインシュタインの光量子仮説、特殊相対論を経て微視の世界の力学法則である量子力学に組み込まれる事により、量子電磁気学として現代の物質観の重要な要素を構成することとなった。

表 5: ものの大きさと電磁波の波長

表 5 に電磁波の波長 λ (単位は cm) と振動数 f (単位サイクルはヘルツと同じ) に応じた電磁波の分類を示す。(**??**) に従って λ と f は $\lambda f = c \sim 3 \times 10^{10}$ cm を満たす。電磁波が物質に及ぼす影響は、その波長や振動数に応じて全く異なる。光は波長がおよそ 380 - 780 mμ (ミリミクロン) の電磁波で、これを可視光線という。1 m$\mu = 10^{-9}$ m=1 nm (ナノメール)=10 $\dot{A}$ である。ここに 1 $\dot{A} = 10^{-8}$ cm=10^{-10} m はオングストロームと呼び、原子・分子の大きさを測るのに便利な長さの単位である。ある決まった振動数を持った正弦波の光は単色光と呼ばれ、人間の目にはある特定の色として認識される。太陽の光は白色光と呼ばれ、それは色々な振動数を持った光が乱雑に混ざり合ったものである。プリズムはガラスの屈折率の振動数による違いを利用して、白色光を単色光に分解する器具である。プリズムを通す事により、白色光は波長の長い (振動数の小さい) 赤色光から波長の短い (振動数の大きい) 紫色の光に分かれる。より波長の長い光は赤外線、より短い光は紫外線と呼ばれ、赤外線は熱的効果が強く紫外線は化学的効果が強い。赤外線より長い波長の電磁波は、テラヘルツ波 (1 THz=10^{12} Hz) と呼ばれるマイクロ波の領域を超え

て、通信やテレビ放送 (UHF, VHF) や ラジオ放送 (FM、短波、中波、長波) の領域に広がっている。例えば、Wi-Fi (ワイファイ) やスマートフォンの使っている周波数領域は 5 GHz (ギガヘルツ) や 750 MHz (メガヘルツ) 程度である。

一般に電磁波は波長が長いほど波としての性格が強く、波長が短いほど粒子としての性格が強い。ラジオ波は建物の後ろにも回り込むが短い波長の電波は極めて直線的に進む傾向が強く、これを電波の指向性と言う。更に地球の約 100 km 上空には成層圏と言う電離層があって、電波は波長の違いによってそこで反射されたり吸収されたりあるいは通過したりする。成層圏の様子は昼と夜でかなり違っており、短波放送は聞こえ方が昼と夜で大きく違う場合がある。地球の上空数百キロメートルあたりに静止衛星を置いて、電波を増幅して送り返す中継局を作ったりもする。衛星放送のテレビアンテナは常に静止衛星の方向を向いている。月まで電波を届けるには、極めて波長の短い電波を使う。光の波長は極めて短くまっすぐ進むので光線と言うこともある。しながら波としての性質も併せ持っており、光の回折や干渉はその性質がもろに現れたものである。こうした光の性質を研究する学問は幾何光学と呼ばれる。一般に波はその発表よりも短い物体を感知することはできない。このことは例えば波に揺られる小さい船と大きな船が跳ね返す波を観察してみるとすぐわかる。小さい船は波に揺られて反射波を作らないが、大きな船に当たると波はひっくり返って戻ってくる。同じことが超音波を使った音波探知機や医療機械のエコー等にも応用されている。光を使った光学顕微鏡で見れる物体の大きさは、物体の波長に比べてはるかに大きなものに限られてくる。もっと小さいものを見るためには、更に波長の短い電磁波を使わなければならない。最近では、電子の量子力学的効果を用いた電子顕微鏡が使われることもある。紫外線よりも短い波長の電磁波は、まずレントゲンによって発見されて彼はそれを X 線と呼んだ。X 線は原子・分子のレベルでの電磁波の放出に関係している。さらに短い電磁波はガンマ線を呼ばれ、原子核反応に関係している。ガンマ線は極めて粒子的性格が強くしばしばガンマ粒子と呼ばれる。人体に対する影響は X 線からガンマ線にかけてますます強くなる。核分裂・核融合反応によって発生する放射線元素の出す電磁波は人体にとって非常に危険なものである。

6　物質中の電磁気学

真空中のマックスウェル方程式 (3.5.1)-(3.5.2) は、アインシュタインの特殊相対性理論に於いて粒子の運動の力学と共に統一的に記述された所謂電気力学から導かれるもので、粒子の古典運動が成り立つ限りそれらは厳密に成り立っている。一方、物質中の電磁気学では荷電粒子の運動が物質の原子・分子構造と密接に関係しており、その記述と応用は複

雑多岐に及んでいる。ここでは、まず誘電体と磁性体の基本的理論を振り返り、物質中での電磁波や電気回路等への幾つかの応用を議論するに留める。

まずはじめに真空中のマックスウェル方程式で電場や磁場が時間に依存しないか、光の速度に比べて十分ゆっくり変化する場合を考える。この時、(3.5.1)-(3.5.2) で時間微分の項は無視出来るので

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\ \boldsymbol{E} &= 4\pi\rho \\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} &= 0 \end{aligned} \tag{6.0.1}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\ \boldsymbol{H} &= 0 \\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c}\bar{\boldsymbol{j}} \end{aligned} \tag{6.0.2}$$

と電場に対する方程式と磁場に対する方程式の二つの独立した方程式に分離される。ここに $\bar{\boldsymbol{j}}$ は、すぐ後で述べる定常電流である。この時、電場は電荷、磁場は電流の局所的な値によって即座に (instantaniously に) 決定される。このような場合を静電場、静磁場の理論という。これらは次節で詳しく述べるが、その前に荷電粒子の定常運動について説明しよう。以下では、荷電粒子が空間の一定領域の内部で運動し続け、消滅したり、遠方に飛び去ったりすることのない事を仮定する。例えば、荷電粒子の周期運動は定常運動である。古典的荷電粒子の状態は座標と速度で記述されるので、荷電粒子の運動に結び付いた物理量 f は $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)$ と表される。今時間の原点を $t=0$ ととり、$t=t_0$ までの平均値を

$$\bar{f} = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)\ dt \tag{6.0.3}$$

で定義する。(6.0.2) から $\mathrm{div}\ \bar{\boldsymbol{j}} = 0$ が導かれるが、この式は正確には満たされない。(3.1.4) の電荷の保存則から

$$\mathrm{div}\ \bar{\boldsymbol{j}} = -\frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} \frac{\partial\rho}{\partial t}dt = -\frac{1}{t_0}(\rho(t_0)-\rho(0)) \tag{6.0.4}$$

である。そこで、$t_0 \to \infty$ を無限大にすると $\rho(t_0)$ は有限に留まるので (6.0.4) は必ず 0 に収束する。定常電流とは、このような時間平均をとったものであると考える。同様に、定常運動では任意の物理量の時間微分の平均値 $\overline{\frac{df}{dt}}$ は 0 となる。

(6.0.1) や (6.0.2) のもう一つの重要な特徴は、重ね合わせの原理が成り立つ事である。例えば、ρ_1 の作る電場を $\boldsymbol{E}_1$、ρ_2 の作る電場を $\boldsymbol{E}_1$ とすると、$\rho=\rho_1+\rho_2$ の作る電場は $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2$ となる。同様に、電流と磁場の関係についても、$\bar{\boldsymbol{j}}_1$ の解を $\boldsymbol{H}_1$、$\bar{\boldsymbol{j}}_2$ の解を $\boldsymbol{H}_2$ とすると、$\bar{\boldsymbol{j}}=\bar{\boldsymbol{j}}_1+\bar{\boldsymbol{j}}_2$ の解は $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2$ となる。

6.1 電気双極子モーメントと磁気双極子モーメント

(6.0.1) の解は (3.5.3) で時間依存性を無視して $\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\ \varphi$ とおき、div grad $\varphi = \Delta\varphi = -4\pi\rho$ から、ポアソン方程式 (2.1.10) を解いて求められる。その解は (2.1.12) で与えられる。時間に依存しない静電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_i e_i \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}^i)$ の作る電場のポテンシャル $\varphi(\boldsymbol{R})$ を求めてみよう。(ここでは、座標ベクトル $\boldsymbol{r}$ とその速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ については荷電粒子の番号を上付きの添字で、三次元ベクトルの成分を下付きの添字で表わすことにする。) この解は

$$\varphi(\boldsymbol{R}) = \int \frac{\sum_i e_i \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}^i)}{|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}|} d\boldsymbol{r} = \sum_i \frac{e_i}{|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}^i|} \tag{6.1.1}$$

となる。ここで $1/|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}|$ のテイラー展開

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}|} &= \frac{1}{R} - \boldsymbol{r} \cdot \nabla \frac{1}{R} + \frac{1}{2!}(\boldsymbol{r} \cdot \nabla)^2 \frac{1}{R} + \cdots \\ &= \frac{1}{R} + \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{R}}{R^3} + \frac{3}{2} \sum_{i,j} \left(\boldsymbol{r}_i \boldsymbol{r}_j - \frac{1}{3} r^2 \delta_{i,j} \right) \frac{\boldsymbol{R}_i \boldsymbol{R}_j}{R^5} + \cdots \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

を使うと

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{R}) = &\frac{Q}{R} + \frac{\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{R}}{R^3} + \frac{3}{2} \sum_{i,j} q_{i,j} \frac{\boldsymbol{R}_i \boldsymbol{R}_j}{R^5} \\ &+ \cdots \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

となる。ここに、$Q = \sum_i e_i$ は全電荷、$\boldsymbol{d} = \sum_i e_i \boldsymbol{r}^i$ を電気双極子モーメント (電気二重極モーメント)、

$$q_{i,j} = \sum_k e_k \left(\boldsymbol{r}_i^k \boldsymbol{r}_j^k - \frac{1}{3} r^2 \delta_{i,j} \right) \tag{6.1.4}$$

を電気四重極モーメントという。(6.1.3) の右辺第一項目 $\varphi_0(\boldsymbol{R}) = \frac{Q}{R}$ は全電荷が座標原点に集まったとみなせる極限で、$R \to \infty$ の極限ではこの項が主要な項となる。系全体としては中性で $Q = 0$ の時、主要な項は二重極モーメントの作るポテンシャル $\varphi_1(\boldsymbol{R}) = \frac{\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{R}}{R^3}$ から始まる。このポテンシャルの作る電場は

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\ \varphi_1(\boldsymbol{R}) = \frac{3(\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{R})\boldsymbol{R} - \boldsymbol{d}R^2}{R^5} \tag{6.1.5}$$

となる。$Q=0$ の時は、電気双極子モーメント $\boldsymbol{d}$ は座標原点の取り方によらないベクトルである。実際、$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}$ へ移ると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}' &= \sum_i e_i(\boldsymbol{r}^i)' = \sum_i e_i(\boldsymbol{r}^i+\boldsymbol{a}) \\ &= \sum_i e_i\boldsymbol{r}^i + \boldsymbol{a}\sum_i e_i = \boldsymbol{d}\end{aligned} \tag{6.1.6}$$

である。更に、$Q=0, \boldsymbol{d}=0$ の時は (6.1.3) の右辺第三項目の電気四重極モーメントの項が主要な部分となる。ここでは詳しいことは省略するが、電荷分布の球対称からのずれを論ずる上で電気四重極モーメントは重要な役割を果たす事になる。

局在した電荷の系に外場 $\phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})$ をかけた場合のエネルギーの変化を計算してみよう。外場を座標原点のまわりに展開して、原点での外場と電場の強さで表わせば $(\Delta\phi_{\text{ext}})(0)=0$ を使って

$$\begin{aligned}\mathcal{H}' &= \sum_k e_k\phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r}^k) \\ &= Q\phi_{\text{ext}}(0) - \boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{E} + \sum_{i,j} q_{i,j}\left(\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{r}_i\partial\boldsymbol{r}_j}\phi_{\text{ext}}\right)(0)\end{aligned} \tag{6.1.7}$$

となる。ここに、$\boldsymbol{E}=-(\text{grad }\phi_{\text{ext}})(0)$ は原点での外部電場の強さである。四重極モーメントは力学の時の慣性モーメントの場合と同様、座標系を回転させる事により $q_{i,j}=0$ for $i\neq j$ と取れるので、(6.1.7) の右辺第三項目は

$$q_{x,x}\frac{\partial\boldsymbol{E}_x}{\partial x} + q_{y,y}\frac{\partial\boldsymbol{E}_y}{\partial y} + q_{z,z}\frac{\partial\boldsymbol{E}_z}{\partial z} \tag{6.1.8}$$

と表わされる。ここに電場の微分の値は原点での値を取るものとする。

(6.0.2) を満たす定常電流の作る静磁場についても、同様な取り扱いが可能である。$\boldsymbol{H}=\text{rot }\boldsymbol{A}$ として $\text{rot rot }\boldsymbol{A}=\text{grad div }\boldsymbol{A}-\Delta\boldsymbol{A}$ を使うと、もし $\text{div }\boldsymbol{A}=0$ ならば (6.0.2) は

$$\Delta\boldsymbol{A} = -\frac{4\pi}{c}\bar{\boldsymbol{j}} \tag{6.1.9}$$

となる。$\text{div }\boldsymbol{A}=0$ という条件は、ローレンツ条件 (3.5.7) で時間に依存しない場合を考えると明らかであるが、これは次のようにしてもわかる。今簡単の為 (6.1.9) で $\bar{\boldsymbol{j}}=e\boldsymbol{v}$ とすると、 (2.1.10) と (2.1.12) より定常運動する荷電粒子に対して

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{c}\overline{\frac{e\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}|}} \tag{6.1.10}$$

となる。そこで、div $\boldsymbol{A}$ を計算すると

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} &= \frac{1}{c}\overline{e\boldsymbol{v}\nabla_{\boldsymbol{R}}\frac{1}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}|}} \\
&= -\frac{1}{c}\overline{e\boldsymbol{v}\nabla_{\boldsymbol{r}}\frac{1}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}|}} \\
&= -\frac{1}{c}\overline{e\frac{d}{dt}\frac{1}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}(t)|}}
\end{aligned} \tag{6.1.11}$$

これは時間微分の平均値なので、荷電粒子の定常運動に対しては 0 である。

(6.1.10) の磁場を計算すると、公式 rot $(\varphi\boldsymbol{A}) = [\mathrm{grad}\ \varphi \times \boldsymbol{A}] + \varphi\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}$ を用いて

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\overline{\left[\nabla_{\boldsymbol{R}}\frac{1}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}|}\times e\boldsymbol{v}\right]} \\
&= \frac{1}{c}\overline{\frac{e[\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})]}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}|^3}}
\end{aligned} \tag{6.1.12}$$

が得られる。これは、定常電流に対するビオ・サバールの法則 (3.2.1) である。

定常電流

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r}) = \overline{\rho\boldsymbol{v}} &= \sum_i e_i\overline{\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^i)\boldsymbol{v}} \\
&= \sum_i e_i\overline{\boldsymbol{v}^i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}^i)}
\end{aligned} \tag{6.1.13}$$

に対して (6.1.9) の解は、$\Delta\varphi = -4\pi\rho$ の解が (6.1.1) となる事と同様に

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) &= \frac{1}{c}\int\frac{\bar{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}|}d\,\boldsymbol{r} \\
&= \frac{1}{c}\overline{\sum_i\frac{e_i\boldsymbol{v}^i}{|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}^i|}}
\end{aligned} \tag{6.1.14}$$

となる。再び (6.1.2) の展開を使うが、今度は右辺第二項目までだけを考えると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) &= \frac{1}{c}\frac{\overline{\sum_i e_i\boldsymbol{v}^i}}{R} + \frac{1}{c}\frac{\overline{\sum_i e_i\boldsymbol{v}^i(\boldsymbol{r}^i\boldsymbol{R})}}{R^3} \\
&= \frac{1}{c}\overline{\frac{d}{dt}\sum_i e_i\boldsymbol{r}^i}\frac{1}{R} + \frac{1}{c}\frac{\overline{\sum_i e_i\boldsymbol{v}^i(\boldsymbol{r}^i\boldsymbol{R})}}{R^3}
\end{aligned} \tag{6.1.15}$$

となる。ここに第一項目は時間微分の平均値だから、定常運動のもとでは 0 となる。更に

$$0 = \overline{\frac{d}{dt}\sum_i e_i\boldsymbol{r}^i(\boldsymbol{r}^i\boldsymbol{R})} = \overline{\sum_i e_i[\boldsymbol{v}^i(\boldsymbol{r}^i\boldsymbol{R}) + \boldsymbol{r}^i(\boldsymbol{v}^i\boldsymbol{R})]} \tag{6.1.16}$$

を使うと

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}) &= \frac{1}{2c}\frac{\overline{\sum_i e_i\left[\boldsymbol{v}^i(\boldsymbol{r}^i\boldsymbol{R}) - \boldsymbol{r}^i(\boldsymbol{v}^i\boldsymbol{R})\right]}}{R^3} \\
&= -\frac{1}{2c}\frac{\overline{\sum_i e_i[\boldsymbol{R}\times[\boldsymbol{r}^i\times\boldsymbol{v}^i]]}}{R^3} \\
&= -\frac{[\boldsymbol{R}\times\bar{\boldsymbol{\mu}}]}{R^3} \\
&= \left[\nabla\frac{1}{R}\times\bar{\boldsymbol{\mu}}\right] \qquad (6.1.17)
\end{aligned}$$

が導かれる。ここに

$$\bar{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\overline{\sum_i e_i[\boldsymbol{r}^i\times\boldsymbol{v}^i]}}{2c} \qquad (6.1.18)$$

を磁気双極子モーメント (磁気二重極モーメント) という。磁気双極子モーメントの作る磁場は、前出の公式 $\mathrm{rot}\ (\varphi\boldsymbol{A}) = [\mathrm{grad}\ \varphi\times\boldsymbol{A}] + \varphi\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}$ を用いて

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} = -\mathrm{rot}\ \frac{[\boldsymbol{R}\times\bar{\boldsymbol{\mu}}]}{R^3} \\
&= -\frac{\mathrm{rot}\ [\boldsymbol{R}\times\bar{\boldsymbol{\mu}}]}{R^3} + 3\frac{[\boldsymbol{R}\times[\boldsymbol{R}\times\bar{\boldsymbol{\mu}}]]}{R^5} \\
&= 2\frac{\bar{\boldsymbol{\mu}}}{R^3} + 3\frac{(\bar{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{R})\boldsymbol{R} - \bar{\boldsymbol{\mu}}R^2}{R^5} \\
&= \frac{3(\bar{\boldsymbol{\mu}}\boldsymbol{R})\boldsymbol{R} - \bar{\boldsymbol{\mu}}R^2}{R^5} \qquad (6.1.19)
\end{aligned}$$

となる。これは、電気双極子モーメントの作る電場 (6.1.5) と同じ形をしている。またここでは詳しいことは省略するが、外部磁場に置かれた磁場双極子モーメントの得るエネルギーについても

$$\mathcal{H}' = -\bar{\boldsymbol{\mu}}\cdot\boldsymbol{H} \qquad (6.1.20)$$

が成り立つ。ここに $\boldsymbol{H}$ は座標原点における磁場の強さである。この式は、電気双極子モーメントの場合の (6.1.7) に対応する。

6.2 誘電体と磁性体

原子・分子レベルでの電気力学では、光の速度に近い速度で進む粒子の運動と激しく変化する電場や磁場を取り扱うことになるが、それらを逐次追跡することは、あまり意味がない。観測されるのは、巨視的レベルでの電場・磁場の変動と荷電粒子の運動、定常電

流等であって、これらを

$$\bar{f}(x,y,z,t)=\frac{1}{V_0t_0}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}d\xi\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}d\eta\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}d\zeta\int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}}d\theta f(x+\xi,y+\eta,z+\zeta,t+\theta) \quad (6.2.1)$$

によって定義する。ここに、$V_0=a^3$ は空間を小さい殻に分けた時のその体積で、その中には充分な数の原子が含まれており、隣り合った殻の代表する平均値は緩やかに変化するものとする。時間平均についても同様であるが、この場合は定常運動の平均時間よりは充分小さいものとする。この平均操作は、座標と時間について微分を取る操作と交換可能である。例えば

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\bar{f}(x,y,z,t)&=\frac{1}{V_0t_0}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}d\xi\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}d\eta\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}d\zeta\int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}}d\theta\frac{\partial}{\partial x}f(x+\xi,y+\eta,z+\zeta,t+\theta)\\&=\overline{\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z,t)} \qquad (6.2.2)\end{aligned}$$

従って、平均値も座標と時間について普通に微分することが出来る。

以下では有限の物質内での電場と磁場に対する Maxwell 方程式を導く。その前にまず、誘電体と導体について説明する。物質の原子構造についてはまた後で詳しく学ぶが、原子は中心に位置するプラスの電荷を帯びた小さいが重い原子核と、その周りを回る負の電荷を帯びた軽い電子からなっている。中性の原子では、原子核の電気量は電子の持つ電荷 (素電荷あるいは電気素量 $e=6.102\cdots\times10^{-19}$ C という) の整数倍で、それを原子あるいは元素の原子番号といい Z で表わす。原子核は Z 個の陽子とほぼ同数の電気的に中性な中性子からなり、陽子と中性子の質量はだいたい等しく、それらは電子の質量の約 2,000 倍である。原子核の周りを Z 個の電子が回っている。原子核と電子はほぼクーロン引力で結び付いている。一方、原子と原子の間の相互作用は基本的にはクーロン力であるが、結合様式はイオン結合や共有結合等種々の結合様式が存在する。また原子が複数集まって出来る分子の間にも、分子間力等、電気分極に関係した複雑な相互作用が存在する。原子・分子の大きさを測るのに適切な長さの単位は Å (オングストローム: 1 Å=10^{-8} cm=10^{-10} m) である。エネルギーの単位としては、一つの電子を電位差 1 V の電位間を移動させるのに必要なエネルギーがよく使われる。これを 1 eV (electron Volt) という。MKSA 単位では 1 CV = 1 J であるから、1 eV=$6.102\cdot\times10^{-19}$ J=$6.102\cdot\times10^{-12}$ erg である。まず物質は有界領域に局在していて、全体としては中性で物質平均をとった電荷密度 $\bar{\rho}$ や電流密度 $\bar{\boldsymbol{j}}$ も初めは 0 と仮定する。物質に外部から電場をかけると平衡状態にあった原子核と電子はその平衡位置から僅かにずれる。外部電場は物質の外部にある正電荷から負電荷の方向を向いているので、プラスの電荷を帯びた原子核は電気力線の方

向に引き寄せられ、電子は電気力線のの出発点の方向に引き寄せられる。結果として物質内では外部電場と同じ方向に電気双極子モーメントが生じ $\bar{\rho} \neq 0$ となる。これを電気分極という。また別の例として、塩化ナトリウム NaCl は常温では固体で Na^+ と Cl^- イオンが格子状に組み合わさった結晶構造を作っていると考えられるが、これに外部電場をかけると平衡点からわずかにずれ電気分極が起こる。これらはいずれも外部電場がそれほど強くなく、平衡点の位置を大きく壊すことはないことを仮定している。また、電気分極もそれほど大きくないとする。この場合、電気分極の作る電場は外部電場と同じ方向を向く。このような物質を誘電体 (絶縁体あるいは不導体ともいう) といい、紙やプラスチック、ガラスまたゴムや空気がそれに属する。これらはしばしば電気を蓄えるコンデンサーの材料に使われる。誘電体のまた別の範疇として強誘電体というものが存在する。このような物質は電気分極が極めて大きく、それが作る電場は外部電場と逆方向を向く。これらの誘電体に対して、鉄 (Fe) や銅 (Cu) の金属は原子の周りに自由に動き回ることができる電子を持っており、これらが外部電場により力を受けて電流が流れる。これを導体、あるいは電気伝導体という。元来、電気的に中性であった導体球を外部電場の中に置くと電子は電気力線の出発方向に引き寄せられ反対方向にはプラスの電荷が現われ最終的に定常状態に達する。この電気分極によって生じる電場は、強誘電体の場合と極めて似ており、外部電場と大きさが等しく向きは逆方向で結果的に導体内の電場は正確に 0 となる。0 でなければ、さらに電流が流れ続けるはずだからである。何らかの方法で導体に正電荷を持ち込めば、全体として中性でない分極した荷電分布が現われるが、そこで外場を取り外して 0 にすれば、余分な電荷は導体球の表面に均等に分布する。その時には、正電荷の反発力が最小になるからである。この場合も導体内部には電場は現れない。電場は導体球の表面から外に出ていて、導体球の内側は表面電荷の影響を全く受けない。こうした導体球を帯電球という。誘電体と導体以外の第三の場合として、一方方向に電場をかけると電流が流れるが、反対方向に電場をかけると絶縁体として働く第三の場合がある。これを半導体といい、ゲルマニウムやシリコン等のいわゆる希土類元素 (レアーアースエレメント) の多くがこの範疇に属する。

外部電場の中に置かれた誘電体の議論に戻って、分極によって生じた物質内の荷電分布を $\bar{\rho} = \sum_i \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)$ とする。$\int \bar{\rho} d\, \boldsymbol{r} = \sum_i e_i = Q = 0$ である。電気双極子モーメントは $\boldsymbol{d} = \int \bar{\rho} \boldsymbol{r} d\, \boldsymbol{r} = \sum_i e_i \boldsymbol{r}_i$ と表わされる。物質中の単位体積あたりの電気双極子モーメントを電気分極といい $\boldsymbol{P} = \bar{\rho} \boldsymbol{r}$ で表わす。すなわち

$$\boldsymbol{d} = \int \bar{\rho} \boldsymbol{r} d\boldsymbol{r} = \int \boldsymbol{P} d\, \boldsymbol{r} \tag{6.2.3}$$

ここに、有界領域に局在する誘電体に対して

$$\int \boldsymbol{P} d\, \boldsymbol{r} = -\int \boldsymbol{r} \mathrm{div}\ \boldsymbol{P} \tag{6.2.4}$$

が成り立つ。実際

$$\mathrm{rot}\ [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{P}] = (\boldsymbol{P} cdot \nabla)\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}\mathrm{div}\ \boldsymbol{P} - (\mathrm{div}\ \boldsymbol{r})\boldsymbol{P} - (\boldsymbol{r} \cdot \nabla)\boldsymbol{P} \tag{6.2.5}$$

を誘電体を覆う領域で積分すると、左辺は一変数については必ず積分できて誘電体の境目で $\boldsymbol{P} = 0$ より 0、また右辺第四項目は部分積分より右辺第三項目と打ち消し合うから、右辺第一項目と第二項目だけが残って (6.2.4) が得られる。(6.2.3) と (6.2.4) を組み合わせると

$$\int \boldsymbol{r}(\bar{\rho} + \mathrm{div}\ \boldsymbol{P}) d\boldsymbol{r} = 0 \tag{6.2.6}$$

が得られる。ここに、$\boldsymbol{r}$ は任意だから

$$\bar{\rho} + \mathrm{div}\ \boldsymbol{P} = 0 \tag{6.2.7}$$

が得られる。cgs-ガウス単位系での Maxwell 方程式 (3.5.1) と (3.5.2) で、(6.2.1) の物質平均をとった

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\ \bar{\boldsymbol{H}} &= 0 \\ \mathrm{rot}\ \bar{\boldsymbol{E}} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{\boldsymbol{H}}}{\partial t} \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\ \bar{\boldsymbol{E}} &= 4\pi\bar{\rho} \\ \mathrm{rot}\ \bar{\boldsymbol{H}} &= \frac{4\pi}{c}\bar{\boldsymbol{j}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

から出発する。ここに $\bar{\rho}$ と $\bar{\boldsymbol{j}}$ としては、外場によって生じた電荷密度と電流密度だけを考える。また電場 $\bar{\boldsymbol{E}}$ については、常に物質内の外部電場を考えるのでバーを省略して $\bar{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}$ と現わす。(6.2.7) を (6.2.9) のはじめの式に代入して

$$\mathrm{div}\ (\boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}) = 0 \tag{6.2.10}$$

ここに $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}$ を物質中の電荷密度といい

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 0 \tag{6.2.11}$$

を満たす。一方、物質中の外部磁場 $\bar{\boldsymbol{H}}$ を磁束密度といい $\bar{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{B}$ と現わす事にする。そうすると (6.2.8) の一番目の式から、(6.2.11) と合わせて

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{D} = 0 \quad , \quad \mathrm{div}\ \boldsymbol{B} = 0 \tag{6.2.12}$$

となる。また (6.2.8) の二番目の式からは

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{6.2.13}$$

が得られる。

外部磁場によってもたらされる磁気分極に対しても、同様な取り扱いが可能である。まず、単位体積あたりの磁気双極子モーメント (6.1.18) $\boldsymbol{\mu} = \overline{\frac{\sum_i e_i[\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i]}{2c}}$ に対しても磁化 $\boldsymbol{M}$ を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= \frac{1}{2c}\int \bar{\rho}[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}]d\ \boldsymbol{r} \\ &= \frac{1}{2c}\int [\boldsymbol{r} \times \bar{\boldsymbol{j}}]d\ \boldsymbol{r} \\ &= \int \boldsymbol{M} d\ \boldsymbol{r}\end{aligned} \tag{6.2.14}$$

で定義する。ここでも (6.2.4) と同様に有界領域に局在する誘電体に対して

$$\int \boldsymbol{M} d\ \boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\int [\boldsymbol{r} \times \mathrm{rot}\ \boldsymbol{M}]d\ \boldsymbol{r} \tag{6.2.15}$$

となりたつ。実際 $[\boldsymbol{r} \times \mathrm{rot}\ \boldsymbol{M}] = \nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{M}) - (\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{M}$ だが、∇ は $\boldsymbol{M}$ だけにかかるから部分積分して

$$\int [\boldsymbol{r} \times \mathrm{rot}\ \boldsymbol{M}]d\ \boldsymbol{r} = -\int \boldsymbol{M} d\ \boldsymbol{r} + 3\int \boldsymbol{M} d\ \boldsymbol{r} = 2\int \boldsymbol{M} d\ \boldsymbol{r} \tag{6.2.16}$$

が得られる。一方、電荷の保存の式から (6.2.7) を使って

$$\mathrm{div}\ \bar{\boldsymbol{j}} = -\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = \mathrm{div}\ \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{6.2.17}$$

であるが、div には rot の不定性があるのであるベクトル $\boldsymbol{W}$ を用いて

$$\bar{\boldsymbol{j}} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \mathrm{rot}\ \boldsymbol{W} \tag{6.2.18}$$

と書ける。そこでこれを (6.2.14) に代入して $[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{P}] = [\boldsymbol{r} \times \bar{\rho}\boldsymbol{r}] = 0$ と (6.2.15) を使うと $\boldsymbol{W} = c\boldsymbol{M}$ がわかる。結局

$$\bar{\boldsymbol{j}} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + c\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{M} \tag{6.2.19}$$

が得られる。これを誘導電流という。特に、右辺第一項目は導体の中を流れる電流である。(6.2.19) を (6.2.9) の第二式に代入すると

$$\mathrm{rot}\ (\boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{M}) = \frac{1}{c}\frac{\partial(\boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P})}{\partial t} \tag{6.2.20}$$

が得られる。そこで $(\boldsymbol{B}-4\pi\boldsymbol{M})$ を新しく $\boldsymbol{H}$ と書いて $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}$ を使うと

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{6.2.21}$$

が得られる。この式は (6.2.13) と極めて対称的な形をしている。$\boldsymbol{H}$ は物質内の磁場の強さと呼ばれ、真空中の磁場の強さとは全く別のものである。まとめると、物質内での Maxwell 方程式は cgs-ガウス単位系では

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\ \boldsymbol{D}&=0\\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{B}&=0\\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{E}&=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{H}&=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\end{aligned} \tag{6.2.22}$$

となる。ここに

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{B}&=\boldsymbol{H}+4\pi\boldsymbol{M}\end{aligned} \tag{6.2.23}$$

である。方程式 (6.2.22) の数は (1+3) $\times$ 2=8 個で、未知数は 3 $\times$ 4=12 個だからこのままでは解けない。解くためには、$\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ の間のなんらかの関係が必要である。これらは、一般には物質の構造に複雑に関係している。しかし、物質が等方的であれば (6.2.23) の $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{H}$ には単純な比例関係 $\boldsymbol{P}=\chi_e\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H}$ が存在する。そこで

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}=(1+4\pi\chi_e)\boldsymbol{E}=\varepsilon\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{B}&=\boldsymbol{H}+4\pi\boldsymbol{M}=(1+4\pi\chi_m)\boldsymbol{H}=\mu\boldsymbol{H}\end{aligned} \tag{6.2.24}$$

ここに $\varepsilon=1+4\pi\chi_e$ と $\mu=1+4\pi\chi_m$ をそれぞれ物質の誘電率、透磁率という。

ここまで、cgs-ガウス単位系での物質中の Maxwell 方程式を議論してきたが、MKSA 単位系においても同様な議論が可能である。まず出発点となる (6.2.8) 、(6.2.9) では $\frac{1}{c}$ や $\frac{4\pi}{c}$ 等が不要である。更にこの単位系では、真空の誘電率 ε_0 や 透磁率 μ_0 を導入しているので、初めから $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ を区別している。従って、出発点となる式は (4.1.27) と (4.1.28) から

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\ \bar{\boldsymbol{B}}&=0\\ \mathrm{rot}\ \bar{\boldsymbol{E}}&=-\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\end{aligned} \tag{6.2.25}$$

$$\mathrm{div}\ \bar{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\bar{\rho}$$
$$\mathrm{rot}\ \bar{\boldsymbol{H}} = \bar{\boldsymbol{j}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{\boldsymbol{E}}}{\partial t} \tag{6.2.26}$$

である。ここでは $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ を基準にとつて物質内部での電場の強さと磁束密度を $\bar{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}, \bar{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}$ と書く事にする。この時 $\bar{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\mu_0}\bar{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}$ である。この $\boldsymbol{B}$ は真空中の $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ とは別ものである。そうすると (6.2.25) の二つの式は、div $\boldsymbol{B} = 0, \mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ となる。まず、電気双極子モーメントの表式は cgs-ガウス単位系でも MKSA 単位系でも同じだから (6.2.26) の第一式で (6.2.7) を使うと、$vareosilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$ とおいて div $\boldsymbol{D} = 0$ が得られる。次に、MKSA 単位系における磁気双極子モーメントの表式は、(6.1.18) と違って前のファクターは $\frac{1}{2c}$ ではなく $c \to 4\pi$ とした $\frac{1}{2\cdot 4\pi}$ となる。そこで $\boldsymbol{M}$ も 4π で割っておいて (6.2.14) は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu} &= \frac{1}{2\cdot 4\pi}\int \bar{\rho}[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}]d\ \boldsymbol{r} \\
&= \frac{1}{2\cdot 4\pi}\int [\boldsymbol{r}\times\bar{\boldsymbol{j}}]d\ \boldsymbol{r} \\
&= \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{M} d\ \boldsymbol{r} \\
&= \frac{1}{2\cdot 4\pi}\int [\boldsymbol{r}\times \mathrm{rot}\ \boldsymbol{M}]
\end{aligned} \tag{6.2.27}$$

となる。あとは (6.2.18) を代入して以前と同様に進むと、今度は $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{M}$ つまり

$$\bar{\boldsymbol{j}} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \mathrm{rot}\ \boldsymbol{M} \tag{6.2.28}$$

が得られる。これを (6.2.26) の第二式に代入すると

$$\mathrm{rot}\ \left(\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}\right) = \frac{\partial(\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P})}{\partial t} \tag{6.2.29}$$

が得られる。ここで、物質中の磁場の強さを新しく $\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}$ で定義すると rot $\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ が得られる。結局まとめると、MKSA 単位系における物質中の Maxwell 方程式として

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{D} = 0$$
$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{B} = 0$$
$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{6.2.30}$$

となる。ここに

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{B} &= \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \end{aligned} \tag{6.2.31}$$

である。ここで再び物質の等方性を仮定して

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E} \tag{6.2.32}$$

となるとし、χ を電気感受率という。すると

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0(1+\chi)\boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{6.2.33}$$

が得られる。ここに $\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi)$ を物質の誘電率という。これを使って電気感受率は

$$\chi = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \tag{6.2.34}$$

と表わされる。電気感受率は無単位である。一般の誘電体に対しては $\chi > 0$、強誘電体に対しては $\chi < 0$ である。同様に、無単位の磁化率 $\eta = -1 \sim \infty$ を

$$\boldsymbol{M} = \eta \boldsymbol{H} \tag{6.2.35}$$

で定義すると、物質内の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(1+\eta)\boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H} \tag{6.2.36}$$

と表わされる。ここに $\mu = \mu_0(1+\eta)$ は物質の透磁率といわれる。特に、$\eta > 0$ の時常磁性、$\eta < 0$ の時反磁性といわれる。$\eta = 0$ の時は透磁率は $\mu = \mu_0$ でこれは真空の値である。

6.3 物質中の光の波動方程式

ここでは、cgs-ガウス単位系における物質内での Maxwell 方程式 (6.2.22) から出発して、物質中の電磁波、特に光の波動方程式を考察する。その際、物質の等方性を仮定して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \varepsilon \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} &= \mu \boldsymbol{H} \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

が成り立っているものとする。これらを組み合わせて容易に

$$\begin{aligned} \left[\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{(\partial t)^2} - \Delta\right]\boldsymbol{E} = 0 \\ \left[\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{(\partial t)^2} - \Delta\right]\boldsymbol{H} = 0 \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

表 5　表 6: いくつかの物質の屈折率 (ナトリウムの D 線・波長 5,893 Å の光に対して) (Wikipedia より抜粋して引用)

物質	屈折率	備考
空気	1.0003	0 ℃、1 気圧
氷.	1.309	0 ℃
水	1.3334	20 ℃
ガラス	1.4585	
水晶	1.5443	18 ℃
ダイアモンド	2.4195	.

を示すことができる。cgs-ガウス単位系では真空の誘電率と透磁率はいずれも 1 ($\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$) だから、(6.3.2) の結果は物質中では電磁波が modify された光速度

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{6.3.3}$$

で伝播することを示している。ここに

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} > 1 \tag{6.3.4}$$

を物質中の光の屈折率といい、一般に 1 よりも大きい。実際には、(6.3.1) の誘電率や透磁率は電磁波の振動数 (あるいは波長) に大きく依存する。しかし可視光線 (3,800 Å - 8,000 Å) の 領域ではかなり安定していて $\varepsilon > 1, \mu \sim 1$ である。例えば、真空の屈折率を 1 として、空気の屈折率は 1.0003、水の屈折率は 1.333 である。(表 6 参照) 従って、物質中における光速は真空中の光速より常に小さい。

光の波長は原子・分子の大きさよりはるかに大きいが、巨視的物体の大きさよりはるかに小さいので、光は物質の中をまっすぐに進む。それでこれを光線と言う。プリズムやレンズによって進行方向を変える光線の性質を調べる研究分野を幾何光学というが、それは光の真空ならびに物質中における光の速度と密接に関係している。例えば、光は空間の二点間を伝わる時に必要な時間が最小になる様な経路に沿って伝わる。これをフェルマーの原理という。例えば、図 1 の様に鏡による光の反射の法則は、鏡の表面で折り返した時に二点間の距離が直線に対して最小になる事により説明することができる。

図 13: 光の反射の法則

また光の屈折に関するスネルの法則は、図 2 の様に光の波面 AB' が波面 A'B に辿り着くまでの時間を等しいとおく事により求められる。すなわち、物質 1 と 2 内の光速をそれぞれ $c_1 = \frac{c}{n_1}, c_2 = \frac{c}{n_2}$ とすると、BB'/c_1=AA'/c_2 より BB'=AB $\sin\theta_1$ かつ AA'=AB $\sin\theta_2$ を用いて

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{6.3.5}$$

が得られる。例えば、空気中から水の中に光が入射する時 $\frac{n_2}{n_1} = \frac{1.3334}{1.0003} = 1.333$ より、$\sin\theta_1 = 1.333\sin\theta_2$ で $\theta_1 > \theta_2$ となる。また、$\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ の時 $\theta_2 = \sin^{-1} 1/1.333 = 48.6$ °　となり、この角度 $\theta_2 = \theta_m$ を全反射角という。水から空気中に屈折する光を考えると、この光は角度が θ_m より大きい角度で水の中を出る時には屈折する事はなく水の表面で反射してしまう。これを全反射という。すなわち、水面近くにいる魚は空気中からは見えない。(図 3 参照)

図 14: スネルの法則

図 15: 全反射

6.4 電気回路

ここでは電気工学上重要な電気回路について、その基本事項を学ぶ。ここでは、この分野で普通に用いられる MKSA 単位系を用いることにする。

まず交流と直流について説明する。「物質中の電磁気学」で定義した定常電流や電荷密度、電流密度の物質平均 $\bar{\rho}$、$\bar{\boldsymbol{j}}$ は、必ずしも時間依存性がないということを意味するのではない。巨視的時間オーダーの時間変動は当然存在する。例えば、電流が時間について正弦関数である時

$$I = \int \bar{\boldsymbol{j}} \cdot d\,\boldsymbol{S} = I_0 \sin\omega t \tag{6.4.1}$$

を振動数 (周波数) $f = \frac{\omega}{2\pi}$ の交流 (AC: alternating current) という。日本では家庭用コンセントの電源は普通電圧 100 V の交流であり、周波数は西日本では 60 Hz、東日本では 50 Hz である。一方、電流が交互にプラス・マイナスと振動するのではなく、一定符号のパルス波であったり constant な振幅 I_0 であったりするものを直流 (DC: direct current) という。日常的なところでは、乾電池は (例えば 1.5 V の) 直流である。トランジスタや最近の AV 機器では直流で作動するものが多く、そのために家庭用電源から 5 V や 12 V に電圧を下げてかつ交流を直流に変える、いわゆる AC アダプターがよく使われる。

図 16: 電気回路に使われる記号

図 17: 最も簡単な電気回路、抵抗回路 (a) 交流電源 (b) 直流電源

図 16 に電気回路でよく使われる記号を示す。また、図 17 は交流電源、あるいは直流電源 (乾電池) に (電気) 抵抗 (eletrical resistance) R あるいは電球だけを導線で繋いだ、最も簡単な電気回路である。この時、抵抗にかかる電圧 V (単位 V: ボルト) と流れる電流 I (単位 A: アンペア) の間にいわゆるオームの法則が成り立つ。

$$V = IR \tag{6.4.2}$$

ここに抵抗 R の単位は Ω (オーム)=V/A である。この様な回路では、電源から供給されるエネルギーは熱や電球から放出される光のエネルギーとして消費される。$W = IV$ を (消費) 電力 (power) といって、その単位は A=C/s, CV=J より J/s である。これを W (ワット)=J/s といい、単位時間あたりのエネルギーを表わす。例えば、5 アンペア流れる家庭用電気ヒーターの消費電力は 500 ワットで 1 秒あたり 500 ジュールのエネルギーを消費する。また、100 ワットの電球には 1 アンペアの電流が流れる。(6.4.2) で交流 $I = I_0 \sin \omega t$ の場合を考えると電圧は

$$V = V_0 \sin \omega t \tag{6.4.3}$$

で与えられる。ここに $V_0 = I_0 R$ である。ここで交流電圧の実効値 $\bar{V}$ を二乗平均で定義する。

$$\begin{aligned}(\bar{V})^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T (V_0 \sin\ \omega t)^2 dt \\ &= (V_0)^2 \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}(1 - \sin 2\omega t) dt \\ &= \frac{(V_0)^2}{2}\end{aligned} \tag{6.4.4}$$

すなわち、実効値は最大値 V_0 を $\sqrt{2}$ で割ったものである。

$$\bar{V} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \tag{6.4.5}$$

電流の実効値についても、同じことが成り立つ。交流電圧 100 V という時は、普通この実効値のことを指している。従って、瞬間的には ±141 V になっている。更に、消費電力の平均値は $\bar{W} = \frac{V_0 I_0}{2} = \bar{V}\bar{I}$ となる。すなわち、全て実効値で計算すればよい。

図 18: 抵抗回路 (a) 直列つなぎ (b) 並列つなぎ

図 18 に直流電源 (例えば乾電池) に二つの抵抗 R_1 と R_2 を二通りにつないだ場合の電気回路をしめす。(a) の場合を直列つなぎ、(b) の場合を並列つなぎという。直流電源を表わす二本の棒のうち、長い方は陽極 (+) を表し短い方は陰極 (-) を表わす。陽極の

方が陰極より電位が高く、陽極から陰極に向けて電流が流れる。(a) では、各抵抗の陽極側から陰極側に向けて電圧降下 $V_1 = IR_1, V_2 = IR_2$ が起こり、その和は電源の起電力 V に等しい。すなわち $V = V_1 + V_2 = I(R_1 + R_2)$。そこで $R = R_1 + R_2$ とおくと $V = IR$ となって、直列つなぎの二つの抵抗は抵抗 R の一つの抵抗と対等であることがわかる。また (b) の並列つなぎの場合には、二つの抵抗を流れる電流をそれぞれ I_1, I_2 として $V = I_1R_1, V = I_2R_2$ より、電荷の保存から導かれる $I = I_1 + I_2$ を用いると

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{V}{R} \tag{6.4.6}$$

から、$1/R_1 + 1/R_2 = 1/R$ から決まる一つの抵抗 R と対等であることがわかる。まとめると、抵抗の結合ルールとして

$$\begin{aligned} &\text{直列つなぎ} : R_1 + R_2 = R \\ &\text{並列つなぎ} : \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} \end{aligned} \tag{6.4.7}$$

が成り立つ。

上で用いた $V = V_1 + V_2$ や $I = I_1 + I_2$ は、電気回路におけるいわゆるキルヒホッフの法則の特別の場合である。これらは次の二つの法則からなる。

(キルヒホッフ の第一法則) 導線の分岐点では、入射する電流と出て行く電流の総和は等しい。

(キルヒホッフの第二法則) 任意の閉じた回路では、電源の起電力は抵抗やコンデンサー、コイルによる電圧降下の総和と等しい。

上の例では直流電源について説明したが、キルヒホッフの法則は交流電源についても同じ様に成り立つ。その際用いる電圧や電流は全て実効値である。

基礎分野では、オームの法則はまた別の風にも表わされる。一様な針金の断面積を S、長さを ℓ、その抵抗を R とすると、R は ℓ に比例し S に反比例するので、RS/ℓ は針金の材質だけによるある定数である。これを $1/\sigma$ とおいて、σ を電気伝導率とよぶ。この時、$R = \ell/(\sigma S)$ を (6.4.2) に代入して $V = |\boldsymbol{E}|\ell, I = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{S}$ を使うと、$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{j}$ が同じ方向を向くことにより

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{6.4.8}$$

が成り立つ。

次にコンデンサーについて考察する。コンデンサーや後で述べるソレノイドはある意味で複素抵抗の様に振る舞うが、その電流・電圧についての依存性は直流か交流かによって大きく異なる。まず図 5 の様に、2 枚の金属板を距離 d を隔てて対極させたものをコン

デンサーといって電気を蓄えるために用いられる。ここに d は金属板の面積 S に比べて充分小さく、従って金属板の端の効果は無視できるものとする。まず二つの金属板に直流電源を用いて電圧をかけると、一方の金属板にはプラスの電荷が、もう一つの金属板にはマイナスの電荷が蓄えられる。これをコンデンサーを充電するという。ある一定時間が経つと電流は流れなくなり、定常状態に達する。この状態で電源をはずしてもプラスの電荷とマイナスの電荷はお互いに引き合って金属表面に分布するので、そのままの状態を保ち、これが充電された状態である。電気力線はプラスの電荷からマイナスの電荷に向けて一様に伸び、その電場の強さ $\boldsymbol{E}$ は金属板のへりの部分を除けば一定である。その大きさは電場に対するガウスの定理 (2.1.1) を一つの金属板の周りに適用することにより簡単に得られる。すなわち、金属板に蓄えられた総電荷を Q と $-Q$ とすると、金属板の外側には電場が存在しないことから $\varepsilon_0 ES = Q$ が得られる。ここに ε_0 は MKSA 単位系における真空の誘電率で、今コンデンサーは真空の中に置かれていると仮定している。2 つの金属板の間の電圧は、はじめにつないだ直流電源の起電力 V に等しいから、$V = Ed = Qd/(\varepsilon_0 S)$ が得られる。そこで $C = \varepsilon_0(S/d)$ とおくと

$$CV = Q \quad \text{with} \quad C = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \bar{V} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \tag{6.4.9}$$

と表わされる。ここに C はコンデンサーの (静電) 容量 (キャパシタンス: capacitance) といい、その単位は F (ファラッド) で F=C/V=C^2/J=C^2/(Nm)、あるいは (誘電率×長さ) より (4.2.1) から F=$(\mathrm{s/m})^2$ A^2/N・m=C^2/(Nm) である。

上では今コンデンサーが真空の中にあると仮定したが、二枚の金属板の間に誘電体を挟むことによりコンデンサーの容量を増やすことができる。この場合の電気容量は、ε を誘電体の誘電率として $C = \varepsilon\frac{S}{d}$ であることはほぼ明らかである。一般に比誘電率は $\varepsilon/\varepsilon_0 = 1 + \chi > 1$ より容量は増える。例えば、(5) より空気中では 1.0003 倍に増える。

コンデンサーの直列つなぎ、並列つなぎについても、抵抗の場合と同じ様に考えることができる。ただし、今度は直列と並列がひっくり返る。すなわち

$$\begin{aligned} &\text{直列つなぎ} : \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C} \\ &\text{並列つなぎ} : C_1 + C_2 = C \end{aligned} \tag{6.4.10}$$

このことは (6.4.9) の C の表式からも容易に推測できる。

図 19: コンデンサー回路 (a) 直列つなぎ (b) 並列え

次に帯電したコンデンサーを導線で結ぶと、正電荷を持つ金属板から負電荷を持つ金属板に電流が流れる。それを I とすると $I = -\frac{dQ}{dt}$ である。電荷がなくなって、両極間の電

位差がゼロとなっても電流は流れ続け、最終的にはじめと符号が逆になった電荷分布に到達する。これは振り子が逆に振れるのと同じ状況である。電荷の流れが停止して電流がゼロになったあとは、逆向きの電流が流れはじめの動作を繰り返す。もし導線の抵抗が全く無ければ、この運動は永久に続く。すなわち、導線には交流電流が永久に流れ続ける。これは、コンデンサーが直流には抵抗が無限大の様に交流には全く抵抗がない様に働くことを意味している。しかしながら、この様な考察は現実的ではない。ここで述べた状況は、実はあとで述べる LC 共振回路について成り立っている。実際には、導線には僅かながらも必ず抵抗が存在しており、次の RC 回路の様に電流は指数関数的に減少する。

図 20: RC 回路

図 20 の様に帯電したコンデンサーに抵抗を繋ぐと、コンデンサーが直流電源の働きをして電流が流れる。この電流を I とすると、(6.4.9) と (6.4.2) とから $V = Q/C = IR$ が成り立つ。ここに $I = -(dQ/dt)$ より、Q の満たすべき方程式として

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda Q \quad \text{with} \quad \lambda = \frac{1}{RC} \tag{6.4.11}$$

が得られる。この解は $Q = Q_0 e^{-\lambda t}$ であり「半減期」$T = 1/\lambda$ ではじめの電荷量 Q_0 が Q_0/e となる。これは、放射性元素の自然崩壊と同じ状況である。そこで電流は

$$I = Q_0 \lambda e^{-\lambda t} \tag{6.4.12}$$

となる。R が大きい時にはこの減衰は緩慢に起こるが、R が小さい時には瞬時に起きる。すなわち $R \to 0$ の極限では、放電は瞬時に起きて以後電流は流れない。

既に「定常電気の作る磁場」のところで述べた様に、図 10 の様に円環状に一様に巻いたコイルをソレノイド (ソレノイドコイル) という。ソレノイドの内部に出来る磁場は、(3.3.2) でアンペールの法則を使って求めた様に MKSA 単位系で $H = nI$ である。ここに、導線はソレノイドの単位長さあたり n 回巻かれており、ソレノイドは充分長く端の効果は無視できるとする。コイルの巻き数を N、ソレノイドの長さを ℓ とすると $n = N/\ell$ であり、I はソレノイドを流れる電流である。既に述べた様に I は定常電流とはいえ交流であるとしてよい。実際コイルに直流電源を繋ぐと、はじめのうちは磁場が生じるがすぐに飽和状態に達しそれ以後は直流電流はあたかもコイルが存在しないかのごとく流れる。これは、コンデンサーに直流電流を流した時にすぐに飽和状態に達し、それ以後は全く電流が流れず、あたかもコンデンサーが無限大の抵抗の様に振る舞うのと似ている。更に、ソレノイドは真空の中に置かれていて、ソレノイド内の磁束密度は $B = \mu_0 H$ であるとする。交流電流に対して磁束密度は変動し、レンツの法則により導線の両端に起電力 $V = -N\frac{\partial BS}{\partial t}$ が生じる。この起電力は磁束の変化を妨げる向きに生じる。この現象を

自己誘導という。ソレノイドに電流を流した時の電圧降下を符号を変えて V と書くと、$L=\mu_0 nNS$ として $V=L\frac{dI}{dt}$ となる。すなわち

$$V=L\frac{dI}{dt} \quad \text{with} \quad L=\mu_0\frac{N^2S}{\ell} \tag{6.4.13}$$

ここに (C のキャパシタンスに対応して) L をインダクタンス (あるいは自己インダクタンス) といい、その単位は H (ヘンリー) =V/(A/s) である。インダクタンス (に交流振動数 ω をかけたもの) は誘導性リアクタンスともいわれる。また別の表現は H=V/(A/s)=J/A^2=Wb/A=Vs/A=s^2/F=Ω· s である。また L の上の表式から透磁率の単位は H/m である。例えば $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ H/m である。コンデンサーの時の誘電体の様に、ソレノイドコイルの中に鉄芯等の磁性体を入れることもある。その時のインダクタンスは、磁性体の透磁率を μ として $L=\mu\frac{N^2S}{\ell}$ となる。コイルの直列・並列つなぎに関しては、$V=L\frac{dI}{dt}$ がオームの法則 (6.4.2) で $R\to L, I\to(dI/dt)$ としたのと同じ構造をしていることから、L は R と同じルールに従うことは明らかである。そこで

$$\begin{aligned}&\text{直列つなぎ}=L_1+L_2=L\\&\text{並列つなぎ}：\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}=\frac{1}{L}\end{aligned} \tag{6.4.14}$$

となる。

図 21: ソレノイドコイル回路 (a) 直列つなぎ (b) 並列つなぎ

ソレノイドコイルの重要な応用の一つは、交流電流に対する変圧器である。図 22 の様に鉄芯の周りに二重にコイルを巻き、その自己インダクタンスをそれぞれ $L_1=\mu n_1N_1S$, $L_2=\mu n_2N_2S$ としそれぞれ 1 次コイル、2 次コイルという。鉄芯を貫いて流れる磁束密度は双方のコイルで共通であるから、一方のコイルの電圧降下 $V_1=L_1(dI_1/dt)$ はレンツの法則による起電力 $V_2=-N_2(d\Phi_2/dt)$ に伝わる。ここに、$\Phi_2=\Phi_1=\mu n_1SI_1$ は、鉄芯を貫く磁束である。そこで、$V_2=-\mu(N_1N_2/\ell)S(dl_1/dt)$ これを $V_2=-M(dI_1/dt)$ と書いて、$M=\mu(N_1N_2/\ell)S$ を相互インダクタンスという。$n_1=N_1/\ell, n_2=N_2/\ell$ より、これはまた $M=\sqrt{L_1L_2}$ とも書ける。V_2 と V_1 の電圧の比を計算すると $-V_2/V_1=M/L_1=\sqrt{L_2/L_1}=N_2/N_1$ そこで、2 次コイルの電圧は 1 次コイルに加えた電圧にコイルの巻き数の比を掛けたものである。このように、1 つのコイルの電流が変化することでもう一つのコイルに起電力が発生する現象を相互誘導と言う。実際には $\Phi_2=\Phi_1$ となるのは理想的な場合で、普通は相互インダクタンスは $M=k\sqrt{L_1L_2}$ $(0<k<1)$ である。

$N_2>N_1$ と取ると、電圧をいくらでも大きく出来る。しかし、エネルギー量は一定であるから $W=VI$ より取り出せる電流は電圧に反比例して少なくなる。変圧器の重要な

応用の一つは、発電所から各家庭に電気を送る送電線である。抵抗のところで見た様に、抵抗 R の発熱量は $W = VI = I^2R$ で電流が小さいと二乗で小さくなる。そこで送電線のエネルギーロスを出来るだけ減らすため、高電圧にして都市間を結び、各家庭に入る前に変電所を設けて電圧を下げる。これが高圧線であり、その電圧は数万ボルトにも及ぶ。

図 22: 変圧器の原理

(6.4.9) と (6.4.2) におけるコンデンサーとコイルの働きは、複素電流 $I = e^{i\omega t}$ を考えると明快になる。この時

$$\begin{aligned} V &= L\frac{dI}{dt} = i\omega LI = \omega Le^{i(\omega t+\pi/2)} \\ &= \frac{Q}{C} = -\frac{I}{i\omega C} = \frac{1}{\omega C}e^{i(\omega t+\pi/2)} \end{aligned} \tag{6.4.15}$$

となるので、これらを $V = IR$ と比較してコイルは $R = i\omega L$ のように、またコンデンサーは $R = \frac{1}{i\omega C}$ の様に振る舞うことがわかる。すなわちキャパシタンスとインダクタンスはレジスタンスを複素数に拡張したものである。ただし電流の位相は、抵抗の時に比べてコイルでは $\pi/2$ だけおくれコンデンサーでは $\pi/2$ だけ進む。このことは、電磁波の電場と磁場が互いに半波長ずつずれて直交していることに符合している。抵抗 R とあわせて $Z = R + i\omega L + 1/(i\omega C) = R + i(X_L - X_C)$ を (複素) インピーダンスという。インピーダンスの実部がレジスタンスで虚部がリアクタンスである。$X_L = \omega L$ を誘導性リアクタンス、$X_C = 1/(\omega C)$ を容量性リアクタンスという。$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ であり、次の LC 共振回路では共振振動数 ω で $X_L = X_C$ となる。また、インピーダンスの逆数はアドミッタンスといわれる。

図 23: LC 共振回路

コンデンサーのところで既に述べた様に、RC 回路で抵抗 R の代わりにソレノイドコイル L を繋ぐと図 23 の LC 共振回路が得られる。この場合 (6.4.9) と (6.4.13) から $V = Q/C = L(dI/dt)$ が得られるので、もう一度時間で微分すると電流に対する微分方程式として

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \omega^2 I = 0 \quad \text{with} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{6.4.16}$$

が得られる。これは調和振動子型の微分方程式で、その一般解は虚数変数の指数関数で

$$I = Ce^{i\omega t} + De^{-i\omega t} \tag{6.4.17}$$

であり、C, D は初期条件から決まる定数である。$t = 0$ の時の電流を I_0、電荷を Q_0 と

すると

$$
\begin{aligned}
C + D &= I_0 \\
C - D &= \frac{Q_0}{C}\frac{1}{i\omega L} = -i\omega Q_0
\end{aligned}
\tag{6.4.18}
$$

である。そこで C, D を逆に解いて (6.4.17) に代入すると

$$
\begin{aligned}
I &= I_0 \cos\omega t + \omega Q_0 \sin\omega t \\
\frac{dI}{dt} &= -\omega I_0 \sin\omega t + \frac{Q_0}{LC}\cos\omega t \\
V &= \frac{Q}{C} = L\frac{dI}{dt} \\
&= \frac{Q_0}{C}\cos\omega t - \omega L I_0 \sin\omega t \\
Q &= CV = Q_0 \cos\omega t - \frac{1}{\omega} I_0 \sin\omega t \\
I &= -\frac{dQ}{dt} = \omega Q_0 \sin\omega t + I_0 \cos\omega t
\end{aligned}
\tag{6.4.19}
$$

となって元へ戻る。これらは、LC 回路の電流や電圧、電荷が全て周波数

$$
f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{6.4.20}
$$

で振動していることを示している。エネルギーはコンデンサーの電極の間の電場からコイル内部に蓄えられる磁場に交互に変換され、振動は永遠に続く。(**??**) の f を LC 共振回路の共振周波数という。実際には、導線に必ず抵抗が存在するためエネルギーは徐々に失われ、しまいには停止してしまう。この場合を減衰振動といい、図 24 の RLC 回路がこれに対応する。抵抗 R による電圧降下 $V = IR$ を考慮すると $V = Q/C = IR + L(dI/dt)$ であることより、時間で微分して $-(dQ/dt) = I$ を使うと電流に対する微分方程式として

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\varepsilon\frac{dI}{dt} + \omega^2 I = 0 \\
&\text{with} \quad \varepsilon = \frac{R}{2L} \quad \text{and} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}
\end{aligned}
\tag{6.4.21}
$$

が得られる。詳しい数学的導出 (例えば、この webpage の「勉強部屋、解析分野」の最後の「簡単な微分方程式」の項 (9-17), (9-18) 式を参照: http://qmpack.homelinux.com/~fujiwara/study/kais
を省略して答えだけを述べると、この解は一般に

$$
I = e^{-\varepsilon t}(Ce^{i\omega' t} + De^{-i\omega' t}) \tag{6.4.22}
$$

により与えられる。ここに $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} \sim \omega$ である。そこで $t \to 0$ とすると、電流は指数関数的に減少する。

図 24: RLC 回路による減衰振動

LC 共振回路を用いた電波伝播のメカニズムを議論する前に、真空管の増幅作用について簡単に説明する。真空増幅管は電球のように内部をほぼ真空にしたガラス球の中にフィラメント以外に陰極と陽極、更にその間にグリッドと呼ばれるコイル状に巻いた鉄線を置いたものである。電球の場合は、フィラメントに流した電流のエネルギーは光として放出されるが、真空管では陰極を温めるために用いられる。陰極と陽極の間に電圧をかけると、陽極から陰極に向けて電場が生じる。陰極がある一定程度以上に温められると、陰極から負の電荷を帯びた電子 (熱電子という) が放出され電場の中で加速され陽極に吸収される。この時、陽極から陰極に向けて電流が流れる。グリッドに微弱な電流を流してプラス・マイナスに帯電させると、陰極から陽極への電子の流れを大きく制御出来る。この様にして、グリッドに流れる電流の変化を陽極・陰極間に流れる電流 の大きな変化に繋げるのが真空増幅管の役割である。この様な増幅作用は、トランジスタなどの半導体素子によっても実現される。

ラジオ放送などに用いられる電磁波 (電波) の周波数 (振動数) は 10^6 Hz (数百万ヘルツ) 等と極めて大きいので、そうした高振動数の交流を作り出すにはちょっとした工夫が必要である。水晶の結晶に微弱な電圧をかけると結晶に変形が生じ、ある決まった固有振動数で振動を始める。この振動数は先ほどの電磁波の振動数に近いので、この振動電流を真空増幅管で増幅して LC 回路に流し込む。LC 回路のコンデンサーはその容量を可変式にして、共振振動数を微細調節出来る様にしておく。この様なコンデンサーはバリコン (variable condenser) と呼ばれる。また、水晶の結晶は水晶発振子という。図 25 の様にコンデンサーの電極を大きく引き離してその間にコイルを置くと、電磁波の発生を考え易い。すなわち、発生した電場の変動は磁場の変動を生み、コンデンサーの外へと押し出される。次に、磁場の変動は新しい電場を生み、古い電気力線を更に外へと押しやっていく。共振回路ではエネルギーの損失は無いので、注ぎ込まれた電気エネルギーはほぼそのまま電磁波のエネルギーとして空間を伝わって行く。この電力は数十キロワット (kW) から数百キロワットにも及び、一秒間に $10^4 - 10^5$ J (ジュール) ほどのエネルギーである。

図 25: 交流電源に繋いだ LC 回路と電波発生の仕組み

電波の受信側では、波長の 1/4 - 1/2 程度のアンテナを張り空中の電磁波の微細な電気信号をひらう。この場合も LC 共振回路を使う。バリコンのつまみを調整することによって、最適の周波数の電波に共鳴させる。これを再び増幅してイヤーホンやスピーカーに繋ぐ。しかしながら、高周波数の正弦波だけでは信号を伝えることは出来ない。音波の

周波数は１万ヘルツかそれ以下で、電波の周波数に比べればおよそ 100 分の１以下である。そこで、波のうなりの現象を利用して、少し違う周波数の高周波を重ね合わせ振幅に緩やかな振動を持たせる。これを変調 (modulation) という。特に、振幅を波打たせる変調は AM (amplitude modulation) 放送という。また別の変調の方法は、周波数を緩やかに変動させることで、これを FM (frequency modulation) 放送という。(図 26 参照) 元の基礎になる高周波の波を搬送波といい、変調された低周波の波を信号波という。ここで述べた電波放送の仕組みはアナログ放送といわれるが、最近は電波をパルス波として送るデジタル放送が普通である。

図 26: AM 変調と FM 変調

近年、この分野は液晶パネルの開発や光ケーブルの実用化等大きな技術的進展を遂げた。更にコンピュータ以外にもスマートフォンやタブレット端末、Wi-Fi と赤外線コントローラーを組み合わせた種々の電気機器等の発展がめざましいが、これらについてはそれぞれの発展分野の学びに委ねることにする。

(電磁気学の項、終わり)