第 5 講　(平成 19 年 5 月 8 日)

4　運動の法則

(ニュートンの運動の 3 法則)

第 1 法則 (慣性の法則) $\cdots$ 慣性系の存在
いかなる物体も外から力が働かないかぎり、静止、または一直線上の等速運動を続ける。

第 2 法則 (運動の法則) $\cdots$ $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$　or　$(d\boldsymbol{p}/dt) = \boldsymbol{F}$
物体の運動量の時間変化は、その物体に働く力に比例し、その方向は力の働く向きに起きる。

第 3 法則 (作用・反作用の法則) $\cdots$ 運動量保存則
物体 1 から物体 2 に力が働くとき (作用)、物体 2 は必ず物体 1 に対し大きさが等しく反対向きの力を及ぼす (反作用)。

[言葉の説明]

慣性 (inertia): 物体が静止、または等速運動の様な運動の状態をそのまま続ける事。

質量: 時間や座標に依存しない物質に" 固有な" 量。加算性が成り立つ。

力: 運動法則が成り立つように決める。自明な場合もあるし、分りにくい場合もある。(例) 筋力、バネの弾性力、抗力、摩擦力、重力、万有引力、保存力、非保存力、遠隔力、近接力、面と面が接しあって働く力、$\cdots$ 相互作用と大体同じ。

運動量: $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ これも加算量である。

(解説)

第 1 法則は、以下の諸法則が成り立つ様な慣性系が存在することを主張している。実際には、完全に外界から遮断された物体なるものは存在しないので、これは実は近似的にしか存在しえない。更に、ニュートン力学では物体間の距離が十分離れれば、その間の相互作用は益々小くなることを暗黙の内に仮定している。運動法則に現れる力は様々な形態が考えられるが、ニュートン力学ではこの運動法則によって力と質量を規定していると考えるのが自然である。(質量の意味は、アインシュタインの特殊相対論によって、ローレンンツ変換の不変量として初めて明確に規定された。) 一般に力は質点の位置と速度の函数であり、第 2 法則の 2 階微分方程式を解くことにより、初期位置と初期速度を与えれば、その後の運動は一意的に決定される。また、ニュートン力学では力は瞬時に働くものと考えている。

慣性の考え方は、すでにガリレオの「天文学対話」のなかに見られる。これに加えて、ケプラーの 3 法則も統合して微積分学という数学的方法により一般的に整理・統合したのがニュートンである。特に、落下の法則と月や天体の運動を上の 3 法則と万有引力の法則によりみごとに説明して、古典力学の体系を打ち立てた。

第 2 法則は、" 運動量の時間変化は力に等しい" ($\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$) と書くことも出来る。特に第 3 法則により、外界から力を受けない質点の集りは、その重心が静止、あるいは一定の速度で運動し続けることが示される。

重力の影響をさける。→ 宇宙空間へ

地上でも近似的に実現できる。(例) なめらかな面を転がる球 $\cdots$ ガリレオの実験

ニュートンのアイデア

“天体の運動と地上の物体の運動を 1 つの運動方程式で記述”

1. 自由落下運動

$$mg = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{4.1}$$

より、$(d^2x/dt^2) = g$ これを、積分して $x = (1/2)gt^2 + v_0t + x_0$: 質量に依存しない。→ 測定から g がもとまる。 $g \sim 9.8$ m/s^2 = 980 cm/s^2.

[力の単位]

1 kg × 1 m/s^2=1 N (ニュートン) : MKS 単位

1 g × 1 cm/s^2=1 dyne (ダイン) : cgs 単位

そこで、1 N= 10^5 dyne

2. 月の運動

万有引力の法則 : 地球の質量を M, 月の質量を m, 地球の中心から月の中心までの距離を R として

$$F = G\frac{Mm}{R^2} \tag{4.2}$$

ここから、月の円運動 (と仮定) の運動方程式は

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \tag{4.3}$$

これより、$v = \sqrt{GM/R}$. 月の周期は

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}} \tag{4.4}$$

地表の質量 m_0 の物体にも同じ力が働くと考えて

$$m_0 g = G\frac{Mm_0}{r^2} \tag{4.5}$$

ここに、r は地球の半径 $r \sim 6,400$ km. ここから $GM = r^2 g$ より、Eq. (4.4) は

$$T = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{r^2 g}} = 2\pi\frac{R}{r}\sqrt{\frac{R}{g}} \tag{4.6}$$

と書ける。月と地球との間の距離、$R/r \sim 30 \times (2r)$ を使うと $T \sim 27$ 日がもとまる。

(作用・反作用の法則の帰結)

$$m_1\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} = \boldsymbol{F} \quad , \qquad m_2\frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} = -\boldsymbol{F} \tag{4.7}$$

辺々加えて、$(d/dt)(m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2) = 0$ より、$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 =$ 一定。

一般に、孤立した (外から、力の働かない) N 個の質点系でも

$$\frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt} = \sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ij} \qquad (i = 1 \sim N) \tag{4.8}$$

ここに $\boldsymbol{F}_{ij}$ は、質点 j が質点 i におよぼす力である。作用・反作用の法則から $\boldsymbol{F}_{ji} = -\boldsymbol{F}_{ij}$ より、全運動量を $\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}\boldsymbol{F}_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j<i}\boldsymbol{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}\boldsymbol{F}_{ij} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j<i}(\boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_{ji}) = 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

すなわち、$\boldsymbol{P}$ は保存される。

“孤立した質点系の全運動量は保存する。”

更に、重心 (質量中心、center of mass) を

$$\boldsymbol{X}_G = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + \cdots m_N\boldsymbol{r}_N}{m_1 + \cdots M_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{4.10}$$

で定義すると、$\boldsymbol{P} =$ 一定、は $(d/dt)\boldsymbol{X}_G = \boldsymbol{V}_G =$ 一定、を意味する。すなわち

“外から力が働かなければ、質点系の重心は等速運動を続ける。”

(ガリレイ変換)

新しい座標系 $\mathcal{K}'$ が、慣性系 (慣性の法則が成り立つ座標系) $\mathcal{K}$ に対して、「一定の」速度 $\boldsymbol{V}$ の等速並進運動をするとして

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V}t \tag{4.11}$$

をガリレイ変換という。この時、 $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{V}$ かつ $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}$. 従って、$\mathcal{K}'$ 系での運動方程式 $\boldsymbol{F}' = m\boldsymbol{a}'$ は、もし $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}$ なら慣性系での運動方程式 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ と同じになる。特に、$\boldsymbol{F} = 0$ なら $\mathcal{K}$ も慣性系になり、無数の対等な慣性系が存在することになる。これを、ガリレイの相対性原理という。逆に、$\mathcal{K}'$ 系が慣性系 $\mathcal{K}$ に対して加速度運動しておれば、運動法則 (運動方程式) 自身が変る。この時、$\mathcal{K}'$ を非慣性系という。

(力積)

運動方程式を $(d\boldsymbol{p}/dt) = \boldsymbol{F}$ と書いて、これを時間 t について $t_0 \sim t_1$ まで積分すると

$$\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}\ dt \equiv \boldsymbol{\Phi}(t_1, t_0) \tag{4.12}$$

これを、「力積」 (impulse) という。

"運動量の変化は、その間に質点に及ぼされた力積に等しい。"

(例) 野球のバットの打撃による、ボールの運動量変化。捕手の受けるボールの運動量変化等。

(運動量保存則の例題) 無重力中で燃料を噴出して飛ぶロケット

(例えば、市村宗武「力学」page 48, 例題参照)