第 8 講　　(平成 19 年 5 月 29 日)

5　運動の保存量

運動の保存量 (時間に依存しない量) の主なものはエネルギー、運動量、角運動量であり、これらはある条件のもとにそれぞれ次の保存則を満す。

エネルギーの保存則 $\cdots$ スカラー量の保存　　(内積に関係)

運動量の保存則 $\cdots$ ベクトル量の保存

角運動量の保存 $\cdots$ ベクトル量の保存　　(外積に関係)

これらは、いずれももとの運動方程式を積分して得られる。それ故、これらの保存則を「運動方程式の積分形」という。

(保存則の効用)

- ◦ 運動の詳細によらない運動学 (kinematics) である。力の性質 (保存力かどうか等) だけで決まる。
- ◦ エネルギー保存則はスカラー量の保存 (加算的：質点系で特に有用) であり、しばしば運動方程式を直接解くより運動の解法が容易になる。
- ◦ 微視の世界では、力自身よりむしろポテンシャルの概念がより本質的。
- ◦ $\cdots$

簡単のため、まず 1 質点の保存則を議論する。

5.1 仕事と運動エネルギー

1 質点の運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \qquad \left(\text{or} \qquad m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}\right) \tag{5.1}$$

と速度 $\boldsymbol{v} = (d\boldsymbol{r}/dt)$ の内積をとる。

$$m\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right) = (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}) \qquad \to \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2\right) = (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}) \tag{5.2}$$

両辺を時刻 t_0 から t_1 まで積分して

$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2\Big|_{t=t_1} - \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2\Big|_{t=t_0} = \int_{t_0}^{t_1} (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v})\,dt \tag{5.3}$$

ここに

$$T = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 \qquad \left(T(t) = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}(t)^2\right)$$
$$W(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v})\,dt \tag{5.4}$$

を、それぞれ運動エネルギー (kinetic energy)、t_0 から t_1 の間に力 $\boldsymbol{F}$ が質点にした仕事という。これらを使うと Eq. (5.3) は

$$T(t_1) - T(t_0) = W(t_1, t_0) \tag{5.5}$$

と表わされる。すなわち、"質点の運動エネルギーの増分はその質点になされた仕事に等しい。" ここから、仕事とエネルギーは実は同じものである事がわかる。また、$W(t, t_0)$ を t で微分して

$$\frac{d}{dt}W(t, t_0) = (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{5.6}$$

これを仕事率という。

(仕事の意味)

質点の運動を、ある起点 O からの距離 s を媒介変数として表わすと

$$W(t, t_0) = \int_{t_0}^{t}\left(\boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)dt = \int_{t_0}^{t}\left(\boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)\frac{ds}{dt}dt = \int_0^s (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_t)\,ds$$
$$= \int_0^s F_t\ ds = \int_0^s F\cos\theta\ ds \tag{5.7}$$

ここに、$\boldsymbol{e}_t = (d\boldsymbol{r}/ds)$ は第 3 章で議論した接線ベクトル、$F_t = (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_t) = F\cos\theta$ は力の接線成分、θ は各点における力と接線の間の角である。s の積分で、区間 $[0, s]$ を N 等分して $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}((i-1)s/N)$ ($i = 1$ - $N+1$), $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(0)$, $\boldsymbol{r}_{N+1} = \boldsymbol{r}(s)$ とすると

$$W(t, t_0) = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i)\cdot(\boldsymbol{r}_{i+1} - \boldsymbol{r}_i) = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}F_x(\boldsymbol{r}_i)\,(x_{i+1} - x_i)$$
$$+ \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}F_y(\boldsymbol{r}_i)\,(y_{i+1} - y_i) + \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}F_z(\boldsymbol{r}_i)\,(z_{i+1} - z_i)$$
$$= \int_\gamma (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_\gamma (\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}) \tag{5.8}$$

と書いて、これを経路 γ: $\{\boldsymbol{r}(s')\}$ $s' \in [0, s]$ にそった線積分という。"仕事は一般には経路による。"つまり、起点 O ($\boldsymbol{r}(0)$) から終点 P ($\boldsymbol{r}(s)$) までのまた別の経路を γ' とすると、一般には

$$\int_\gamma (\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}) \neq \int_{\gamma'} (\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}) \tag{5.9}$$

実際、起点と終点を入れ替えるだけでも、仕事の符号は変る。γ と同じ経路を、今度は P を起点、O を終点とする経路を $-\gamma$ で表すと

$$\int_{\gamma} (\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}) = -\int_{-\gamma} (\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}) \tag{5.10}$$

$W(t, t_0)$ が経路によらない時、力が「保存力」であるという。この時、$\boldsymbol{F} = F_x \boldsymbol{e}_x + F_y \boldsymbol{e}_y + F_z \boldsymbol{e}_z$ はあるスカラー函数 $U = U(\boldsymbol{r}) = U(x,\ y,\ z)$ の偏微分係数 (導関数) で書ける ($W = -U + \mathrm{const.}$)。

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x} U\ , \quad F_y = -\frac{\partial}{\partial y} U\ , \quad F_z = -\frac{\partial}{\partial z} U \tag{5.11}$$

これを、まとめて (ベクトル記法で)

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}\, U = -\mathrm{grad}\ U \tag{5.12}$$

と書き、$\boldsymbol{\nabla}$ をナブラ (nabla)、あるいは grad を gradient いう。これらは、線型微分作用素 (operator) である。

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathrm{grad} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{5.13}$$

(例)

重力、バネの力、万有引力、クーロン力、$\cdots$ 保存力

摩擦、空気の抵抗、$\cdots$ 非保存力

[仕事とエネルギーの単位]

力 $\times$ 距離 $= \mathrm{kg\,m/s^2 \cdot m = N \cdot m = J}$ (ジュール) $\cdots$ MKS 単位

cgs 単位では　　dyne $\cdot$ cm $=$ erg (エルグ)

1 N=10^5 dyne より、 1 J=10^7 erg

また、仕事率の単位は 1 W (ワット) = 1 J/s

(簡単な例)

- ◦ 1 kg の重りを静かに 1 m 持ち上げるために必要な仕事 (エネルギー) は約 9.8 N $\cdot$ m=9.8 J
- ◦ 等速円運動では力の向きと速度の向きが垂直より、力は仕事をしていない。$\rightarrow$ 運動エネルギーが保存される。すなわち、速さ (速度の大きさ) が一定

○ 1 次元運動

(自由落下運動) z-軸を垂直上方向にとって、重力は $\boldsymbol{W} = -mg\,\boldsymbol{e}_z$ より

$$
\begin{aligned}
W(t, t_0) &= \int_{t_0}^{t} (\boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{v})\ dt = \int_\gamma (\boldsymbol{W} \cdot d\boldsymbol{r}) = \int_{z_0}^{z} (-mg)\ dz \\
&= -mg(z - z_0)
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

そこで、$U(z) = mgz$ を重力の位置 (ポテンシャル) エネルギーとすると $W(t, t_0) = -U(z) + U(z_0)$. そこで、$t \to z$ で書いて Eq. (5.5) は $T(z) - T(z_0) = -U(z) + U(z_0)$. つまり

$$
T(z) + U(z) = T(z_0) + U(z_0)\ , \quad \text{or} \quad \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgz_0 \tag{5.15}
$$

これを、(力学的) エネルギーの保存則という。

(バネの運動) 復元力は $F = -kx$ より

$$
W(t, t_0) = \int_{x_0}^{x} (\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}) = -\int_{x_0}^{x} kx\ dx = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k{x_0}^2 \tag{5.16}
$$

そこで、$U(x) = (1/2)kx^2$ をバネの位置エネルギーとして $W(t, t_0) = -U(x) + U(x_0)$ より

$$
T(x) + U(x) = T(x_0) + U(x_0)\ , \quad \text{or} \quad \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{const.} \tag{5.17}
$$

○ 万有引力ポテンシャル: 3 次元 (or 2 次元) 極座標で

$$
U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \tag{5.18}
$$

偏微分の公式 $(\partial r / \partial \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{r}/r)$ と動径方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r = (\boldsymbol{r}/r)$ を用いると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} U(r) = -\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{r}} \frac{d}{dr} U(r) = -\frac{dU(r)}{dr} \frac{\boldsymbol{r}}{r} = -\frac{dU(r)}{dr} \boldsymbol{e}_r \\
&= -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \boldsymbol{e}_r
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

すなわち、万有引力は動径方向 (の逆) を向く。$\boldsymbol{F} \parallel \boldsymbol{e}_r$ この様に力の方向が座標原点方向を向く力を「中心力」という。この時、ポテンシャルは $\boldsymbol{r}$ の向きによらず、その絶対値 $r = |\boldsymbol{r}|$ だけの函数である。