(略解) H15.8.4

I. 解析函数の特異点性は、1) $f(z) = z/\sin z$ の $z = 0$ 等の除きうる特異点、2) $f(z) = 1/\sin z$ の $z = 2\pi ni$ ($n =$ 整数) 等の極、3) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ の $z = 0$ 等の真性特異点、の三つに分類されます。1) は例えば $f(0) = 1$ と定義することによって簡単に取り除ける解異点、2) は、$(z - 2\pi ni)^N$ (N は十分大きい正の整数) 等をかけると $(z - 2\pi ni)^N f(z)$ が正則になるような、比較的性質のよい解異点です。一方、3) の $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ は、z が正の実軸上から 0 に近づく時、∞ に発散しますが、負の実軸上から 0 に近づく時は、0 に収束します。($\lim_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$、$\lim_{x\to-0} e^{\frac{1}{x}} = 0$) すなわち、極の場合は必ず $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$ となりますが、真性特異点の場合には、$\lim_{z\to a} f(z)$ は真性特異点 a の近傍で無限列を適当に取ることにより、どんな値にも限りなく近づける事が出来ます。(Weierstrass の定理)

II. この講義前半のノートの page 46 - 47 に証明がありますので、そちらを見てください。基本的には、講義の中でやりました「調和函数に対する最大値の定理、最小値の定理」の証明と同じです。

III. 幾つかの方法で証明できます。講義では、(方法 1) を紹介致しました。

(方法 1) Euler の公式の応用

$\phi(z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)/\Gamma(2z)$ として、Euler の公式を適用します。その時、$\Gamma(2z)$ に対しては、$n \to 2n$ としておくのがコツです。そうしますと

$$\phi(z) = \frac{2^{2z}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)}{2\Gamma(2z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n-1)!)^2\, 2^{2n-1} n^{\frac{1}{2}}}{(2n-1)!}$$

となって、z-independent になりますから、$z = 1/2$ とおきますと、この値が $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ に他ならない事が分かって、証明が完了します。この方法は、Whittaker and Watson の「A Course of Modern Analysis」の page 240 に書かれている方法ですが、そこではもっと一般的な式が「The multiplication-theorem of Gauss and Legendre」という表題で紹介されています。

(方法 2) ポリ Γ-函数を使う方法 (アールフォルス「複素解析」page 215)

$\psi'(z)$ の sum の表式で、$n = \text{even}$ と $n = \text{odd}$ の sum に分けますと、簡単に

$$\psi'(2z) = \frac{1}{4}\psi'(z) + \frac{1}{4}\psi'(z+1/2)$$

が示せますから、これを 2 回積分して

$$\log\Gamma(2z) = \log\Gamma(z) + \log\Gamma(z+1/2) + az + b$$

が導かれます。定数、a、b、を決めるために $z = 1/2$ と $z = 1$ とおくと $a = 2\log 2$、$b = -\log\sqrt{\pi} - \log 2$ となって、関係式が導けます。

(方法 3) Γ-函数と β-函数の関係を使う方法

この方法は、岩波全書の「特殊函数」の page 12 -13 に書いてある方法で、Γ-函数と β-函数のよく知られた関係式

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

を使います。今、β-函数の積分表示式で $x=y=z$ と仮定しますと、簡単な積分変数変換 $4t(1-t)=s$ が出来て

$$B(z,z)=2^{1-2z}B(z,1/2)$$

という関係式が導かれます。これを、上の関係式で Γ-函数に対する関係式に直したものが、求める表式です。

(コメント)

I. はいつも通り点を取ってもらうための常識的な問題です。除きうる特異点と極以外の特異点は真性特異点ですが、それは必ずしも孤立しているとは限りません。例えば、極の集積点は真性特異点ですが、そのような場合には真性特異点の周りの Laurant 展開は存在しません。

II. は講義で調和函数の最大値の原理、最小値の原理を学んだ時、やっておく様にと言った問題です。$[K]$ の内点 a で $|f(z)|$ が最大と仮定して平均値の性質を用いて a を中心とし $[K]$ に含まれる円周上で $|f(z)|=\text{const.}$ となるところまでは皆さん出来ているのですが、そのあと、これが実は $[K]$ 全体で $f(z)=\text{const.}$ (この const. はまた別の const.) を意味するというところが全く出来ていません。講義ノートの前半にあります様に、これを示すには $\log f(z)=\log|f(z)|+i\arg\ f(z)$ を用います。実部が定数だから Cauchy-Riemann の関係より、虚部も定数となるのです。従って、円周上で $f(z)=\text{const.}$。(もし、始めの $\text{const.}=0$ なら当然、円周上で常に $f(z)=0$ ですから、この議論は不要で log が singular になる心配は不要です。) 次に、円周上で $f(z)$ が一定なら、$f(z)$ が解析的である $[K]$ 全体で一定なのは解析接続のところで習った通りです。(円周上で、例えば、$f(z)=0$ の時を考えてみてください。)

III. は、講義でやりましたので、かなりの人が出来ていました。ほとんどの人が 、この方法でした。

配点は I が 40 点、II が 30 点、III が 30 点です。I は三つの特異点それぞれにつき 10 点、真性特異点の Weierstrass の定理の正確な記述が 10 点です。例があげられていないものは、それぞれ 5 点減点です。II では、平均値の性質の証明が 10 点、最大値の原理、最小値の原理がそれぞれ 10 点です。最大値の原理の証明で、上の論点が明確になされていない答案は (ほとんどの人がそうですが) 5 点減点です。今回は、問題をやさしくしたのにもかかわらず、あまり出来が良くなかったので 50 点以上を合格としました。