平成 13 年度「物理数学」(前期) 試験問題 (H13.9.26 実施)

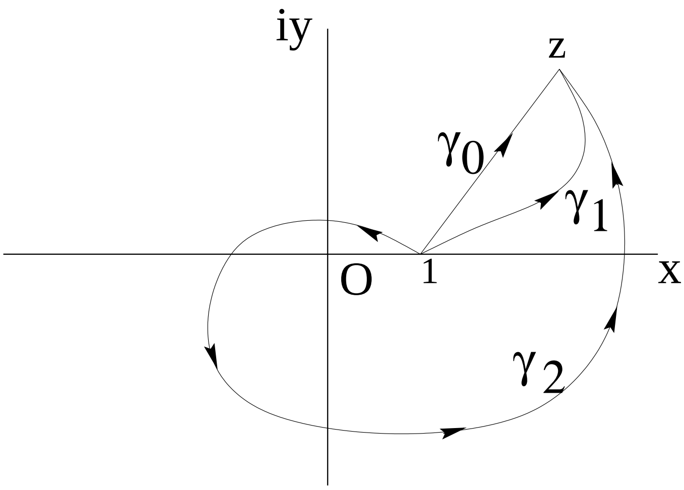
I. (対数函数)　複素数の対数函数は、1 と z $(\neq 0)$ を結ぶ適当な積分経路に添っての、複素平面上での線積分

$$\log z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} \tag{1}$$

によって定義することが出来る。このとき、以下の設問に答えよ。

1) (1) の線積分を、ζ の極座標での曲線表示: $\zeta = r(t)e^{i\theta(t)}$ $(t \in [0,1])$ を用いて直接評価し、$\log z$ を $|z|$ と $\arg z$ を用いてあらわせ。ただし、$r(t) \neq 0$ for $^\forall t$、かつ、$r(t),\ \theta(t)$ は連続的微分可能とする。

2) 右図の三つの経路、$\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2$ に添っての積分の値を比較せよ。複素数の偏角は、実軸から時計の反対まわりを正として測るものとする。



3) 以上のことより、(1) の積分が積分経路によらない一定の値を持つためには、複素平面に対してどのような工夫をする必要があるか？ また、複素数と $\log z$ の主値について説明せよ。

II. (Borel の積分)　ベキ級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が $|z| \leq r$ (円周も含める) で解析的とする。このとき、新しいベキ級数を $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!}$ で定義して、積分

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-t}\phi(zt)dt \tag{2}$$

を考える。以下の事を示せ。

1) 係数 a_n に対して、$|a_n| < \frac{M}{r^n}$ $(n = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$ が成り立つ。ここに、M は、n に無関係な定数である。

2) $\phi(z)$ は、全複素平面で解析的 (すなわち、整函数) であり、

$$|\phi(z)| < Me^{\frac{|z|}{r}} \quad , \qquad |\phi^{(n)}(z)| < \frac{M}{r^n}e^{\frac{|z|}{r}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots) \tag{3}$$

が任意の $z \in \boldsymbol{C}$ に対して成り立つ。

3) $|z| < r$ のとき、積分 (2) が存在し、$F(z)$ はこの領域で解析函数となる。

4) (2) で部分積分を行う事により

$$F(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n + R_N(z) \tag{4}$$

かつ、$\lim_{N\to\infty} R_n(z) = 0$ を示し、$|z| < r$ のとき、$F(z)$ が、もとの $f(z)$ を表わすことを示せ。

5) べき級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ $(r < 1)$ にこれらを適用し、(2) の積分が、このベキ級数をその収束半径 $\rho = 1$ を越えて、解析接続した函数を表わしていることを示せ。

III. (Bessel 函数の母関数展開) $e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ を、z について原点まわりに Laurent 展開することにより

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} &= \cdots + z^n J_n(x) + \cdots + zJ_1(x) + J_0 \\ -\frac{1}{z}J_1(x) &+ \frac{1}{z^2}J_2(x) - \cdots + (-1)^n \frac{1}{z^n}J_n(x) + \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

と展開できる事を示せ。ここに

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\ d\theta \tag{6}$$

は、n 次の Bessel 函数である。