平成 14 年度「物理数学」(前期) 試験問題 (H14.7.17 実施)

I. (解析性)

領域 D で定義された解析函数 (正則函数) $f(z)$ の性質を 5 つ述べ、それぞれについて簡単に説明せよ。

II. (Γ-函数と B-函数の関係)

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\ \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (\,x,\ y>0\,)$$

を示せ。ここに

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \ \ , \qquad \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \qquad (\,x,\ y>0\,)$$

III. (Hermite 多項式の母関数と積分表示式)

Hermite 多項式は、$x \in (-\infty, \infty)$ として

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

で定義される。

1) $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$ の具体的な表式を求めよ。(n 次の多項式である。)

2) 公式、$e^A B e^{-A} = B + \frac{1}{1!}[A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \cdots$ (ここに、$[A,B] = AB - BA$ 等) を用いて、Hermite 多項式の母関数展開

$$w(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} H_n(x) t^n$$

が成り立つことを示せ。また、これを t についてのベキ級数と見たとき、その収束半径はいくらか？

3) $e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2+2xui}du$ と書ける事を用いて、Hermite 多項式の積分表示式

$$H_n(x) = (-i)^n \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2+2xui} u^n du$$

を示せ。

4) 3) の結果を用いて、もう一つの母関数展開

$$W(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \exp\left\{ -\frac{(x^2+y^2)t^2 - 2xyt}{1-t^2} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} H_n(x) H_n(y) t^n$$

が成り立つことを示せ。ここに、$|t| < 1$ である。

(注) a を正の実数 ($a > 0$)、b を任意の複素数とする時、一般に普通の実数の時と同じ Gauss 積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2+bu} du = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{b^2}{4a}}$$

が成り立つ。

IV. (Euler の公式)

$|q| < 1$ の時、$|z| < 1$ に対して、Euler の公式

$$\frac{1}{(1-z)(1-zq)(1-zq^2)(1-zq^3)\cdots}$$
$$= 1 + \frac{1}{(1-q)} z + \frac{1}{(1-q)(1-q^2)} z^2 + \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} z^3 + \cdots$$

が成り立つ事を次の手順に従って示せ。

a を任意の実数として

$$h_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^a)(1-q^{a+1})(1-q^{a+2})\cdots(1-q^{a+n-1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots(1-q^n)} z^n$$

とする。(1 項目=1 とする。収束半径 1 のベキ級数である。)

1) $h_a(z) - h_{a+1}(z) = -zq^a h_{a+1}(z)$ を示せ。

2) $h_a(z) - h_a(qz) = z(1-q^a) h_{a+1}(z)$ を示せ。

3) これらから、$h_a(z) = \frac{1-zq^a}{1-z} h_a(qz)$ を示し、これを n 回繰り返し、そのあと $n \to \infty$ とすることによって

$$h_a(z) = \frac{(1-zq^a)(1-zq^{a+1})(1-zq^{a+2})\cdots(1-zq^{a+n-1})\cdots}{(1-z)(1-zq)(1-zq^2)\cdots(1-zq^{n-1})\cdots}$$

と書ける事を示せ。

4) これらから、$a \to \infty$ とすることにより、Euler の公式を証明せよ。

5) $h_a(z)$ の等式で、$z \to zq^{-a}$ と変えて、そのあと $a \to -\infty$ とすることにより

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots(1-q^n)} z^n = (1+z)(1+zq)(1+zq^2)\cdots$$

が成り立つ事を示せ。