1　解析学の基礎

1.1　複素数

$$
\text{数 (複素数)}\begin{cases}\text{実数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正の整数 (自然数)}(1,2,\cdots)\\ 0\\ \text{負の整数 }(-1,-2,\cdots)\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正 }(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots)\\ \text{負 }(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\cdots)\end{cases}\end{cases}\\ \text{無理数}\begin{cases}\text{正 }(\sqrt{10},\cdots)\\ \text{負 }(-\sqrt{10},\cdots)\end{cases}\end{cases}\\ \text{虚数 }(i,1+i,\frac{1-i}{\sqrt{2}},\cdots)\end{cases}
$$

「数直線 $\equiv$ 実数全体の集合」$\cdots$ 幾何学的な定義 $\Leftarrow$ 実は不十分

「Dedekind の切断による実数の定義」

　実数を大小関係により 2 つのグループに分けたとき
$\Big(\boldsymbol{R}=A\cup B \quad A\cap B=\phi \quad \text{かつ} \quad {}^{\forall}a\in A \quad {}^{\forall}b\in B \quad a<b\Big)$

　1) A に上端の点があって、B に下端の点がない : $A=(-\infty,c] \quad B=(c,\infty)$

　2) B に下端の点があって、A に上端の点がない : $A=(-\infty,c) \quad B=[c,\infty)$

のどちらか (それ以外はない)

切断によって決まる点 c を「実数」と" 名づける"(定義) $\cdots$ **「実数の連続性」**

(notation) 例えば $a\in(\infty,c]$ は $-\infty<a\leq c$

(注意)　$-\infty$ や ∞ は数ではない

有理数は数直線の中に**稠密** (dense) に分布している。

練習 1: 2 乗すれば 2 となる数 ($\sqrt{2}$) が有理数でありえない事を証明せよ
(ヒント: p/q は最大限約分した、最も簡単な有理数として、$(p/q)^2=2$ のとき、$(2q-p/p-q)^2=2$ を示す)

練習 2: 循環少数 $\equiv$ 有理数 を示せ

練習 3: 連分数とは何か ?

「複素数の極座標表示」

$z = x + iy$
$\left(\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right.$

ここに
$r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$: modulus of z (z の絶対値)
$\theta = \arg z$: argument (or phase) of z (z の偏角)

$\arg z$ の**主値** : $-\pi < \arg z \leq \pi \quad \text{or} \quad -\pi < \mathrm{Arg}\, z \leq \pi$

$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ (Euler の公式)

1.2 収束、ベキ級数、連続関数、一様収束

1.2.1 数列の収束

$$a_1, a_2, a_3, \cdots \qquad (\in \boldsymbol{R} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{C}) \quad \text{が} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

とは

$$^\forall\varepsilon > 0 \qquad ^\exists N \qquad \langle\langle \quad |a_n - a| < \varepsilon \quad \text{for} \quad ^\forall n > N \quad \rangle\rangle$$

○「単調有界列は収束」

今 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ とする
任意の実数 x は、次の 1) と 2) のどちらかに分類される

1) $^\exists N \qquad \ll \quad a_n > x \quad \text{for} \quad ^\forall n > N \quad \gg$
2) $a_n < x \quad \text{for} \quad ^\forall n$

どんな x に対しても 2) が成り立たない (1) だけ) なら $a_n \to \infty$
ある x に対して 2) が存在するなら

$$A = \left\{ x : {}^\exists N \qquad \ll \quad a_n > x \quad \text{for} \quad ^\forall n > N \quad \gg \right\}$$
$$B = \left\{ x : \quad a_n < x \quad \text{for} \quad ^\forall n \right\}$$

とすると $A \cup B = \boldsymbol{R}$, $A \cap B = \phi$ かつ $A \neq \phi$, $B \neq \phi$ より $\boldsymbol{R}$ の 1 つの切断を与える → 実数 a が決まる

このとき、$^\forall\varepsilon > 0$ として、$a - \varepsilon \in A$, $a + \varepsilon \in B$ より

$$^\exists N \qquad ^\forall n > N \quad \text{に対して} \quad a_n > a - \varepsilon \quad \text{かつ} \quad a_n < a + \varepsilon$$

つまり　$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ より、$|a_n - a| < \varepsilon$　$\to$　$\lim_{n\to\infty} a_n = a$

○「有界閉集合内の無限点列は 1 つ以上**集積点** をもつ」(Bolzano-Weierstrass の定理)

(証明) 区間縮小法による。1 次元の閉区間 $[a, b]$ で考える
　$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots \in [a, b]$　(同じものが無限回あらわれるだけの case は考えない)
2 等分割を繰り返して、無限個の点が内在する閉区間列を見つける
$\to$ 1 点が決まる　$x \in [a, b]$

x の任意の近傍に無限個の点列が存在する。

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ a_{n_3},\ \cdots \to x : \text{集積点}$$

一般に、無限点列 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$ があるとき $\{\ a_N,\ a_{N+1},\ \cdots\ \}$ の上限、下限を

$$\ell_N = \sup\{\ a_N,\ a_{N+1},\ \cdots\ \} \qquad m_N = \inf\{\ a_N,\ a_{N+1},\ \cdots\ \}$$

とすると

$$m_1 \le m_2 \le \cdots \le \ell_2 \le \ell_1 \qquad (\text{証明せよ})$$

より ℓ_N と m_N は単調有界　$\to$　極限 ℓ と m が存在する

$$\ell = \lim_{N\to\infty} \ell_N \qquad m = \lim_{N\to\infty} m_N$$

一般に $m \le \ell$ だが $m = \ell$ のとき a_n は収束するといって

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{n\to\infty} \inf a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \ell = m$$

と書く

(注意)　上限とは最小上界のこと。つまり、$\ell = \sup\{\ a_1,\ a_2,\ \cdots\ \}$ とは

$$\begin{cases} a_1,\ a_2,\ \cdots \le \ell & (\text{上界}) \\ {}^\forall\varepsilon > 0 \quad {}^\exists a_n & \ell - \varepsilon < a_n \end{cases}$$

○「数列 a_n が収束するための必要十分条件は

$${}^\forall\varepsilon > 0 \qquad {}^\exists N \qquad \langle\langle\quad |a_p - a_q| < \varepsilon \quad \text{for} \quad {}^\forall p,\ q > N \quad\rangle\rangle \qquad (\text{Cauchy 列})$$

(証明)

(必要条件)　$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ として $|a_p - a_q| \le |a_p - a| + |a_q - a| < 2\,\varepsilon$

(十分条件)　或る $\varepsilon > 0$ をとって $q > N$ を固定すると

$$-\varepsilon < a_p - a_q < \varepsilon \quad \text{or} \quad -\varepsilon + a_q < a_p < \varepsilon + a_q \quad \text{for} \quad {}^\forall p > N$$

従って a_p は有界列であり 1 つ以上集積点をもつ。しかし、2 つ以上あることはない。実際、それを $x \neq y$ とすると

$$\begin{array}{l} a_{i_1},\ a_{i_2},\ a_{i_3},\ \cdots\ \to\ x \\ a_{j_1},\ a_{j_2},\ a_{j_3},\ \cdots\ \to\ y \end{array}$$

つまり

$${}^\exists N \qquad {}^\forall n > N \qquad |a_{i_n} - x| < \varepsilon \qquad |a_{j_n} - y| < \varepsilon \qquad \text{かつ} \qquad |a_{i_n} - a_{j_n}| < \varepsilon$$

とできる。そこで

$$|x - y| = |x - a_{i_n}| + |a_{i_n} - a_{j_n}| + |a_{j_n} - y| < 3\,\varepsilon$$

一方 $\varepsilon < \frac{1}{3}|x-y|$ と選ぶと、左辺は $|x-y| > 3\,\varepsilon$ で矛盾

1.2.2　級数の収束

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = S_N + R_N$$

ここに

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^{N} u_n \qquad \text{部分和} \\ R_N &= \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n \qquad \text{剰余項} \end{aligned}$$

S が収束するとは $\lim_{N\to\infty} S_N$ が存在すること。つまり $\lim_{N\to\infty} R_N = 0$

$${}^\forall\varepsilon > 0 \qquad {}^\exists N \qquad \langle\langle \quad |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots| < \varepsilon \quad \text{for} \quad {}^\forall n > N \quad \rangle\rangle \tag{1}$$

or　Cauchy の判定条件を使うと

$${}^\forall\varepsilon > 0 \qquad {}^\exists N \qquad \langle\langle \quad |u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots + u_{N+p}| < \varepsilon \quad \text{for} \quad {}^\forall p \quad \rangle\rangle \tag{2}$$

ここに $R_{N,p} = u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots + u_{N+p}$ と書く。特別の場合として $u_n \to 0$ for $n \to \infty$

(注意 1)　(2) は、$^\forall n > N$

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

としなくてもよい。実際 (2) があれば

$$\begin{aligned}
&|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \\
&= |u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} - (u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots + u_n)| \\
&\leq |u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots + u_{n+p}| + |u_{N+1} + u_{N+2} + \cdots + u_n| < 2\,\varepsilon
\end{aligned}$$

(注意 2)　(2) で、$p \to \infty$ としただけでは不十分。しかし、絶対収束であれば

$$^\forall \varepsilon > 0 \qquad ^\exists N \qquad |u_{N+1}| + |u_{N+2}| + \cdots < \varepsilon \tag{3}$$

でよい

(絶対収束)　$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| = 0$

(条件収束)　$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| = \infty$　だが　$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n = 0$

例えば

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots &= \log 2 = 0.6931\cdots \\
1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$Cf.$ $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$ あるいは
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$ で $x = 1$ としたもの

(注意)　条件収束の場合は足す順序をかえてはダメ

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots \leq \frac{1}{1\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 5} + \cdots \\
&= \frac{\pi^2}{8} = 1.2337 \qquad \text{(Bernoulli 数で表される)}
\end{aligned}$$

○ 正項級数 $S = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ $(v_n \geq 0)$ の場合は

$$\begin{aligned}
&S_N \leq S_{N+1} \leq \cdots \leq S \\
&R_N \geq R_{N+1} \geq \cdots \geq 0 \\
&S = S_N + R_N
\end{aligned}$$

$S_N \to \infty$ か ${}^\forall S_N \leq S$ かどちらか
$S = \infty$ $(\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \infty)$ $\quad S < \infty$ $(\sum_{n=0}^{\infty} v_n < \infty)$

このとき

$$S < \infty \Longleftrightarrow R_N \to 0 \quad \text{for} \quad N \to \infty$$

$\Rightarrow$ は自明
$\Leftarrow$ は $S = \infty$ とすると

$$\begin{aligned}
&R_{Np} = v_{N+1} + \cdots + v_{N+p} = S_{N+p} - S_N \to \infty \quad \text{for} \quad p \to \infty \\
&\to R_N = \infty \quad \text{となって矛盾}
\end{aligned}$$

つまり

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=N+1}^{\infty} v_n \to 0 \quad \text{for} \quad N \to \infty$$

$\circ$ 一般の場合
$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ に対して、$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < \infty$ のとき絶対収束という。絶対収束するための必要十分条件は

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| \to 0 \quad \text{for} \quad N \to \infty$$

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ が収束するが、絶対収束しないとき条件収束という

$\circ$ 絶対収束 $\to$ 収束 $\to u_n \to 0 \quad (n \to \infty)$
対偶をとると
$u_n \quad \not\to \quad 0 \quad (n \to \infty) \quad \to$ 収束せず $\to$ 絶対収束せず

(注意) $\quad u_n \to 0 \ \ (n \to \infty)$ は収束するための必要条件だが、十分条件ではない

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ は発散 (証明： $\displaystyle R_{n,n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$
として $S_{2^{n+1}} = 1 + R_{1,1} + R_{2,2} + R_{4,4} + \cdots + R_{2^n,2^n}$ を考える)
しかし
$\displaystyle\gamma = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} - \log N\right) = 0.57722\cdots$ $\qquad$ (Euler 係数) $\qquad$ は収束

(例)

$$
\begin{aligned}
&1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\\
&|z|<1 \quad \text{なら} \quad \lim_{n\to\infty} z^{n+1}\to 0\\
&\text{つまり}\\
&1+z+z^2+\cdots=\frac{1}{1-z} \qquad (1)\\
&z \quad \text{をかけて} \quad z+z^2+z^3+\cdots=\frac{z}{1-z}\\
&z\to 1/z \quad \text{として}\\
&1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{z}{z-1} \qquad (2)\\
&\text{そこで} \quad \cdots+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots=\frac{z}{z-1}+\frac{z}{1-z}=0
\end{aligned}
$$

は間違い ((1) の収束半径は $|z|<1$, (2) の収束半径は $|z|>1$ で両方とも成り立つ領域はない)

[絶対収束の判定法]

○ (Cauchy の判定条件)
「$\lim_{n\to\infty}\sup|u_n|^{\frac{1}{n}}<1$ なら $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ は収束
　$\lim_{n\to\infty}\sup|u_n|^{\frac{1}{n}}>1$ なら $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ は発散」

(証明)　$\lim_{n\to\infty}\sup|u_n|^{\frac{1}{n}}<1$ なら
$^\exists N \quad {}^\forall n>N \qquad |u_n|^{\frac{1}{n}}<\rho<1$ なる N に無関係な ρ が存在する

$$
\sum_{n=N+1}^{\infty}|u_n|<\sum_{n=N+1}^{\infty}\rho^n=\rho^{N+1}(1+\rho+\rho^2+\cdots)=\frac{\rho^{N+1}}{1-\rho}\to 0 \quad \text{for} \quad N\to\infty
$$

$\lim_{n\to\infty}\sup|u_n|^{\frac{1}{n}}>1$ なら

$$
|u_n|^{\frac{1}{n}}>\rho>1 \quad \text{つまり} \quad |u_n|>\rho^n\to\infty \quad \text{for} \quad n\to\infty
$$

$u_n \not\to 0$ $(n\to\infty)$ より収束せず (絶対収束もせず) → 発散

○ (D'Alembert ratio)
「$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\ell<1$ 　なら収束
　$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\ell>1$ 　なら発散」
　$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$ 　のときは要注意

(証明)　$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell < 1$ なら

$$^\forall\varepsilon > 0 \qquad ^\exists N \qquad \langle\langle \quad \left| \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - \ell \right| < \varepsilon \quad \text{for} \quad ^\forall n > N \quad \rangle\rangle$$

ε として $\varepsilon = (1/2)(1-\ell)$ をとると

$$-\frac{1}{2}(1-\ell) < \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - \ell < \frac{1}{2}(1-\ell)$$

つまり

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \frac{1}{2}(1+\ell) < 1$$

そこで $\rho = (1/2)(1+\ell)$ とすると $\rho < 1$ で

$$\begin{aligned}
&^\exists N \qquad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \rho \quad \text{for} \quad ^\forall n > N \\
&\text{or} \qquad |u_{n+1}| < \rho\ |u_n| \\
&\qquad\quad |u_{n+2}| < \rho\ |u_{n+1}| < \rho^2\ |u_n| \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| < |u_{N+1}|(1+\rho+\rho^2+\cdots) = |u_{N+1}|\frac{1}{1-\rho} \to 0 \qquad \text{より} \\
&\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < \sum_{n=0}^{N} |u_n| + |u_{N+1}|\frac{1}{1-\rho} < \infty \quad \to \quad \text{絶対収束}
\end{aligned}$$

また $\ell > 1$ なら $\varepsilon = (1/2)(\ell-1)$ として

$$-\frac{1}{2}(\ell-1) < \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - \ell < \frac{1}{2}(\ell-1)$$

つまり

$$1 < \frac{1}{2}(1+\ell) < \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$$

そこで $\rho = (1/2)(\ell+1)$ として $\rho > 1$ で

$$\begin{aligned}
&|u_{n+1}| > \rho\ |u_n| \quad \text{for} \quad ^\forall n > N \qquad \text{より} \\
&|u_{N+2}| > \rho\ |u_{N+1}| \\
&|u_{N+3}| > \rho^2\ |u_{N+1}| \\
&\qquad \vdots \\
&|u_{N+p}| > \rho^{p-1}\ |u_{N+1}| \quad \to \quad \infty \quad (p\to\infty) \qquad \text{より} \\
&u_n \quad \not\to \quad 0 \quad (n\to\infty) \qquad \to \qquad \text{発散}
\end{aligned}$$

(もし　$u_{N+1} = 0$　なら、もっと大きい N からはじめる)

(例) Hypergeometric series

$$\begin{aligned}
&F(a,b,c;z)\\
&=1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}z+\frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}z^2+\frac{a(a+1)(a+2)\cdot b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}z^3+\cdots\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{n!\ (c)_n}\ z^n \quad \text{ここに} \quad (a)=a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)\ \ etc.
\end{aligned}$$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}z\right|\to|z| \quad \text{for} \quad n\to\infty$$

より $|z|<1$ なら収束　 $|z|>1$ なら発散
($|z|=1$ のとき $\Re e(a+b-c)<0$ なら絶対収束：文献を調べよ)

[絶対収束級数の基本的性質]

○「$S=\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ が絶対収束なら項の順序をどのように変更しても絶対収束で、その値はもとの値に等しい」

(証明)　$\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|<\infty$ として $S'_N=\sum_{n=0}^{N}u'_n$ とする

$$^\forall\varepsilon>0 \qquad ^\exists N \qquad \langle\langle \quad |u_{N+1}|+|u_{N+2}|+\cdots+|u_{N+p}|<\frac{1}{2}\,\varepsilon \quad \text{for} \quad {}^\forall p \quad \rangle\rangle$$

$\{u'_\ell\}_{\ell=1\sim m}$ で m を十分大きくとると

$$\{u'_\ell\}_{\ell=1\sim m}\supset\{u_1\cdots u_N\}$$

とできる。そこで $^\forall k>m$ に対して

$$S'_k=S_N+\{N\ \text{より大きい添え字をもつ}\ S\ \text{の項}\}$$

そこで

$$S'_k-S=S_N-S+\{\ 〃\ \}$$

の絶対値を考えると

$$\begin{aligned}
&|\{\ 〃\ \}|<\frac{1}{2}\,\varepsilon\\
&|S_N-S|\le|u_{N+1}|+|u_{N+2}|+\cdots\le\frac{1}{2}\,\varepsilon\\
&|S'_k-S|=|S_N-S|+|\{\ 〃\ \}|<\varepsilon
\end{aligned}$$

そこで

$$\lim_{k\to\infty} S'_k = S \qquad \to \qquad S' = S$$

○「$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ $T = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ が双方とも絶対収束なら $\{u_p v_q\}$ を任意の順序で並び変えた級数も絶対収束で、その値は ST に等しい」
　例えば

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p+q=n} u_p v_q \right) \\ &= u_0 v_0 + (u_1 v_0 + u_0 v_1) + (u_2 v_0 + u_1 v_1 + u_0 v_2) + \cdots \\ &= ST \end{aligned}$$

(証明)

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ T_n &= v_0 + v_1 + \cdots + v_n \end{aligned}$$

とすると

$$ST = (\lim S_n)(\lim T_n) = \lim(S_n T_n)$$

ところで

$$\begin{aligned} S_n T_n &= u_0 v_0 + u_1 v_0 + \cdots + u_n v_0 \\ &+ u_0 v_1 + u_1 v_1 + \cdots + \cdots + u_n v_1 \\ &+ \cdots \\ &+ u_0 v_n + u_1 v_n + \cdots + \cdots + u_n v_n \end{aligned}$$

より

$$|S_n T_n| \leq \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} |u_p v_q| = \left(\sum_{p=0}^{n} |u_p| \right) \left(\sum_{q=0}^{n} |v_q| \right) < \infty \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

より $\{S_n T_n\}$ は絶対収束。そこで $\{u_p v_q\}$ の順序をどう並び変えてもよく

$$S_n T_n \quad \to \quad ST \qquad (n \to \infty)$$

特に $P_m=\sum_{\ell=0}^m\left(\sum_{p+q=\ell}u_pv_q\right)$ とすると $^\forall m>2\,n$ に対して

$$\begin{aligned}
&|P_m-S_nT_n|\\
&\le\left(\sum_{p=n+1}^{m}|u_p|\right)\left(\sum_{q=0}^{m}|v_q|\right)+\left(\sum_{p=0}^{m}|u_p|\right)\left(\sum_{q=n+1}^{m}|v_q|\right)\\
&\le\left(\sum_{p=n+1}^{\infty}|u_p|\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty}|v_q|\right)+\left(\sum_{p=0}^{\infty}|u_p|\right)\left(\sum_{q=n+1}^{\infty}|v_q|\right)\\
&\to\quad 0\quad\text{for}\quad n\to\infty
\end{aligned}$$

そこで

$$P=\lim_{m\to\infty}P_m=\lim_{n\to\infty}(S_nT_n)=\left(\lim_{n\to\infty}S_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}T_n\right)=ST$$

1.2.3　ベキ級数

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\qquad {}^\forall a_n,\ z\in\boldsymbol{C}$$

○「$f(z)$ が z_0 で収束すれば $|z|<|z_0|$ なるすべての点で絶対一様収束」

(証明) $\lim_{n\to\infty}a_nz_0^n=0$ (実は $a_nz_0^n$ が有界ならばよい) より、十分大きな n に対して N に無関係に

$$|a_nz_0^n|<M\quad\text{for}\quad {}^\forall n>N$$

そこで

$$|a_nz^n|=|a_nz_0^n|\ \left|\frac{z}{z_0}\right|^n<M\ \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

$|z/z_0|<1$ より

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|\ a_nz^n\ |<M\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\frac{z}{z_0}\right|^n=M\ \left|\frac{z}{z_0}\right|^N\frac{|z|}{|z_0|-|z|}\to 0\quad\text{for}\quad N\to\infty$$

$|z|<|z_0|$ なる点 $|z|$ に対して $|z|<r<|z_0|$ をとると $|z|$ のかわりに r を使って

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_nz^n|<\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|r^n\to 0\quad(N\to\infty)\qquad \underline{z\text{ の値に関係なく}}\ \to\ \text{“一様に”}$$

○「或る点 z_0 で絶対収束しなければ $|z|>|z_0|$ なる任意の点 z で発散 (条件収束もしない)」

(証明) 収束すれば、上を逆に使って矛盾！
(注意)　一般には、絶対収束しないからといって発散するとは限らない (条件収束するかもしれない) しかし、ベキ級数では

$$u_n(z) = a_n z^n$$

という一般項の特殊なかたちのために、上の簡単な性質が成り立つ

○ 収束半径 ρ とは

$$R = \left\{ r \in [0, \infty); \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty \right\}$$

として ($0 \in R$ より $R \neq \phi$) $\rho = \sup R$ (R の上限)
つまり

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & r < \rho \quad \text{for} \quad {}^{\forall} r \in R \\ \text{ii)} & {}^{\forall}\varepsilon > 0 \quad {}^{\exists} r \in R \qquad \rho - \varepsilon < r \end{array}$$

このとき

$$\left.\begin{array}{ll} |z| < \rho & \text{なら } f(z) \text{ は絶対収束} \\ |z| > \rho & \text{なら発散 (条件収束もしない)} \end{array}\right\} \quad (1)$$
$$|z| = \rho \quad \text{なら要注意}$$

(証明)　$|z| < \rho$ なら ii) で $\varepsilon = \rho - |z|$ ととって

$${}^{\exists} r \in R \quad |z| < r \to \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$$

$|z| > \rho$ なら $|z| > r > \rho$ なる r に対して $r \notin R$ ($r \in R$ なら 1) に矛盾)。つまり、r で絶対収束しない。2 番目の命題より $|z|$ で発散 (条件収束もしない)

(注意)　(1) を満たす ρ は一意的。実際 (1) を満たす ρ が 2 つあったとしてそれを ρ と ρ' とすると、$\rho < \rho'$ なら $\rho < |z| < \rho'$ をとって ρ' の方からは収束、ρ の方からは発散 → 矛盾。$\rho > \rho'$ でも同様。→ $\rho = \rho'$

○「$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}}$」　　(Cauchy-Hadamard)

実際 $u_n = a_n z^n$ として

$$\lim_{n\to\infty} \sup |u_n|^{\frac{1}{n}} = |z| \lim_{n\to\infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{|z|}{\rho}$$

より $|z|<\rho$ で絶対収束。$|z|>\rho$ で発散

○「$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\ell$ が存在するとき $\rho=\frac{1}{\ell}$」　　(D'Alembert ratio の逆数)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=|z|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=|z|\ell=\frac{|z|}{\rho}$$

$|z|<\rho$ で絶対収束。$|z|>\rho$ で発散

(例)　　(D'Alembert ratio から)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n \qquad \rho=0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}z^n \qquad \rho=\infty$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \rho=1 \qquad |z|=1 \text{ で発散 (なぜなら } \lim_{n\to\infty} z^n \not\to 0)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}z^n \qquad \rho=1 \qquad z\neq 1 \text{ で条件収束}\quad z=1 \text{ で発散}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}z^n \qquad \rho=1 \qquad |z|=1 \text{ で絶対収束}$$

○「ベキ級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ が収束半径 ρ をもつとき、それを項別微分して得られるベキ級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_nz^{n-1} \quad (=f'(z) \text{ と書く})$$

も同じ収束半径 ρ をもつ」

(証明) $|z|<\rho$ なる z に対して $|z|<r<\rho$ をとると $\lim_{n\to\infty}|a_n|r^n=0$ より、十分大きな n に対して一様に

$$|a_n|r^n<M \quad (n\to\infty) \qquad \text{つまり} \quad |a_n|<\frac{M}{r^n}$$

そこで

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_nz^{n-1}|\leq M\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{|z|^{n-1}}{r^n}=\frac{M}{r}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1}$$

そこで D'Alembert ratio をとると

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ \left(\frac{|z|}{r}\right)^n}{n\ \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{|z|}{r} = \frac{|z|}{r} < 1$$

より、右辺の級数は収束。従って $f'(z)$ は絶対一様収束。この級数の収束半径を ρ' とすると

$$r \leq \rho'$$

r は任意に ρ に近くとれるから $\rho \leq \rho'$

逆に $|z| > \rho$ なら $|z| > r > \rho$ なる r に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = \infty \qquad (r > 0)$$

そこで

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} \geq \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n = \infty$$

$f'(z)$ は $|z| > r$ で発散: $r \geq \rho' \to \rho \geq \rho'$ 　　ゆえに $\rho = \rho'$

○ 同様に項別積分した式 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1}$ も $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と同じ収束半径で収束する

$\Longrightarrow$ ベキ級数はそれが収束する限り何回でも微分、積分できる (解析函数の重要な性質)

(注意)　ベキ級数は収束半径内で "解析函数" だから、それを微分しても積分しても同じ収束半径で収束する

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$a_n z^n$ は解析的 (微分可能) でかつ絶対一様収束 $\to$ $f(z)$ も解析的で項別微分できる

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

1.2.4 連続函数

[実変数の連続函数]

$f(x)$ ($x \in [a,b]$) が x_0 で連続とは

$$^{\forall}\varepsilon > 0 \qquad ^{\exists}\delta > 0 \qquad \langle\langle \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{for} \quad |x - x_0| < \delta \quad \rangle\rangle$$

(注意)　一般には δ は x_0 による (δ_{x_0}) が、x_0 によらないとき一様連続という

$$\begin{cases} \text{左からの極限値} & f(x_0-0) \\ \text{右からの〃} & f(x_0+0) \\ x_0 \text{ での値} & f(x_0) \end{cases}$$

として

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$$

のとき、$f(x)$ は $x=x_0$ で連続という

$Cf.$ 除きうる不連続点

○ 複素数の場合も同様。つまり

$$^\forall\varepsilon>0 \qquad ^\exists\delta>0 \qquad \langle\langle \quad |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon \quad \text{for} \quad |z-z_0|<\delta \quad \rangle\rangle$$

○ 二実変数の場合、つまり、$f(t,x)$ が t, x の 2 変数について連続とは ($t\in[a,b]$, $x\in[\alpha,\beta]$ とする)

$$^\forall\varepsilon>0 \qquad ^\exists\delta>0 \qquad \langle\langle \quad |f(t,x)-f(t_0,x_0)|<\varepsilon \quad \text{for} \quad \sqrt{(t-t_0)^2+(x-x_0)^2}<\delta \quad \rangle\rangle$$

だが、この場合 $t=t_0$ とおくと

$$^\forall\varepsilon>0 \qquad ^\exists\delta>0 \qquad \langle\langle \quad |f(t,x)-f(t,x_0)|<\varepsilon \quad \text{for} \quad |x-x_0|<\delta \quad \rangle\rangle$$

となって、x についての連続性が t によらず一様に連続となる。

(2 変数について連続でない例)

$$f(t,x)=\begin{cases} \frac{xt}{x^2+t^2} & \text{for} \quad (t,x)\neq(0,0) \\ 0 & \text{for} \quad (t,x)=(0,0) \end{cases}$$

は原点において t と x について個別に連続であるが、それにもかかわらず 2 変数 t, x に関しては連続でない。実際、直線 $x=mt$ で $t\neq0$ のとき $m/(1+m^2)$ の値をとり $t\to0$ で 0 とならない。

「Hine-Borel の定理」

　有界なる閉集合 (compact 集合) が無限個の円板によって覆われるなら、実は有限個の円板で覆われる。つまり、K: 有界な閉集合として

$$K\subset\cup_\lambda V_{C_\lambda}(a_\lambda)\longrightarrow K\subset\cup_{n=1}^N V_{C_n}(a_n)$$

ここに

$$V_C(a)=\{z\in\boldsymbol{C};|z-a|<r\}\qquad \text{半径 } r \text{ の円板}\quad(\text{近傍})$$

(証明) 区間縮小法による。K を含む正方形 Q をとって K が有限個の円で覆われないなら、Q を 4 分割したときの K との共通部分のどれかが有限個の円で覆われない。その小さな正方形を Q_1 かつ $K_1=Q_1\cap K$ とする。更に、K_1 を 4 分割して、同じ操作を繰り返す: $K_2=Q_2\cap K$

$$K_1,\ K_2,\ K_3\cdots\longrightarrow z_0\in K$$

1 点 z_0 が決まるが K は閉集合より $z_0\in K$。そこで

$$^{\exists}\lambda\qquad z_0\in V_{C_\lambda}(a_\lambda)$$

$V_{C_\lambda}(a_\lambda)$ は開集合だから、z_0 のある近傍が $V_{C_\lambda}(a_\lambda)$ に含まれるが、そうすると十分大きな N に対して

$$K_N\subset V_{C_\lambda}(a_\lambda)$$

となって矛盾

(注意)　我々の $\boldsymbol{R}^2$ 空間は Hausdorff 空間ゆえ compact $\equiv$ 有界閉集合

$$\Bigl(\qquad V(a)\cap V(b)=\phi\qquad\qquad \text{for}\quad {}^{\forall}a,\ b\in\boldsymbol{R}^2\quad\text{and}\quad a\neq b\qquad\Bigr)$$

◦ Hine-Borel の定理の変形

有限閉区間 $[a,b]$ とそれを覆う開区間の族

$$I(x)=(x-\delta_x,x+\delta_x)\quad\text{with}\quad\delta_x>0\quad\text{and}\quad x\in[a,b]$$

が与えられたとする。ここに

$$[a,b]\subset\cup_{x\in[a,b]}I(x)$$

より $x\in[a,b]$ から有限個の開区間の列

$$\{\ I(x_r);r=1\sim n\ \}$$

を選び出して $[a,b]$ を覆うことが出来る。それを用いて $[a,b]$ を n 個の閉区間 $\{J_r\}_{r=1,n}$ に分けて

$$[a,b]=J_1+J_2+\cdots+J_n$$

J_r が $I(x_r)$ の中に完全に入る様にすることが出来る。

[連続の一様性]

○「実函数 $f(x)$ が $x \in [a,b]$ で連続なら、実は一様連続」

(証明) x における連続性より

$$^\forall \varepsilon > 0 \qquad ^\exists \delta_x > 0 \qquad \langle\langle \quad |f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{for} \quad ^\forall x' \quad |x' - x| < \delta_x \quad \rangle\rangle$$

これらの δ_x を用いて

$$I(x) = (x - \delta_x, x + \delta_x) \quad \text{with} \quad \delta_x > 0 \quad \text{and} \quad x \in [a,b]$$

は $[a,b]$ の無限被覆を与える。そこで、$[a,b]$ を有限個の閉区間 $J_1,\ J_2,\ \cdots,\ J_n$ に分割できて

$$J_r \subset I(x_r) = (x_r - \delta_{x_r}, x_r + \delta_{x_r}) \qquad r = 1, \cdots,\ n$$

つまり

$$|x' - x_r| < \delta_{x_r} \quad \text{for} \quad ^\forall x' \in J_r \quad \text{かつ}\ |f(x') - f(x_r)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

δ_0 を $|J_1|, \cdots,\ |J_n|$ の最小の値とする。$\xi,\ \xi' \in [a,b]$ の 2 点として $|\xi - \xi'| < \delta_0$ とする。$\longrightarrow \xi$ と ξ' は或る同じ J_r に属するか、あるいは、となりあった J_r と J_{r+1} に属するかのどちらか。後者の場合、J_r と J_{r+1} の境を ξ_0 とすると

$$\begin{aligned}
&|f(\xi) - f(x_r)| < \frac{\varepsilon}{4} &\qquad& |f(\xi_0) - f(x_r)| < \frac{\varepsilon}{4} \\
&|f(\xi') - f(x_{r+1})| < \frac{\varepsilon}{4} && |f(\xi_0) - f(x_{r+1})| < \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned}
&|f(\xi) - f(\xi')| = |(f(\xi) - f(x_r)) - (f(\xi_0) - f(x_r)) - (f(\xi') - f(x_{r+1})) + (f(\xi_0) - f(x_{r+1})| \\
&\leq |f(\xi) - f(x_r)| + |f(\xi_0) - f(x_r)| + |f(\xi') - f(x_{r+1})| + |f(\xi_0) - f(x_{r+1})| < \varepsilon
\end{aligned}$$

もし同じ区間に属すれば

$$\begin{aligned}
&|f(\xi) - f(\xi')| = |(f(\xi) - f(x_r)) - (f(\xi') - f(x_r))| \\
&\leq |f(\xi) - f(x_r)| + |f(\xi') - f(x_r)| < \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

○ 複素変数の函数 $f(z)$ についても同様。$f(z)$ が有界閉集合内で連続なら実は一様連続
$\longrightarrow$ Cauchy の定理の証明に使う

連続函数の一様連続性から、連続函数の多くの重要な性質がでる。練習問題として次の命題を証明することを各自試みよ

(練習)

1) $[a, b]$ で連続な函数は有界

2) 有界閉区間で連続な函数は最大値をもつ。最小値も同様

3) 有界閉集合 K で複素変数函数 $f(z)$ が連続なら、$|f(z)|$ は K で最大値、最小値をもつ

(参考 1) もし $f(z)$ が有界閉域 K で解析的なら、$|f(z)|$ はその最大値を K の境界上でとる。また、K において $f(z) \neq 0$ なら $|f(z)|$ はその最小値を境界上でとる (最大値の原理、最小値の原理)

(参考 2) $f(z)$: 連続なら

$$f^{-1}(\text{open set}) = \text{open set} \qquad f^{-1}(\text{closed set}) = \text{closed set}$$

ここから

$$f(\text{連結集合}) = \text{連結集合}$$

しかし

$$f(\text{open set}) \neq \text{open set} \qquad (\text{例}) \quad f(x) = 1/(1+x^2)$$

しかしながら

$$\begin{aligned} & f(\text{compact set}) = \text{compact set} \\ \text{or} \qquad & f(\text{有界閉集合}) = \text{有界閉集合} \qquad (\text{for} \quad \text{Hausdorff 空間}) \end{aligned}$$

これらより、上の命題はほとんど自明

(練習)

4) $[a, b]$ で連続な実函数 $f(x)$ はその最大値、最小値の間の値をすべてとる (連続関数の中間値の定理)

5) $f(x)$: $[a, b]$ で連続なら Riemann 積分可能であるが、$[a, b]$ における $f(x)$ の最大値、最小値をそれぞれ U、L として

$$U(b-a) \geq \int_a^b f(x)dx \geq L(b-a) \qquad (\text{第一平均値の定理})$$

その時

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

なる $\xi \in [a,b]$ がある。また、$F(x)$ が $[a,b]$ で連続な微係数 $F'(x)$ をもてば (連続的微分可能という)

$$F(b) - F(a) = (b-a)F'(\xi)$$

なる $\xi \in [a,b]$ がある

6) (パラメータを含む積分の微分) $f(t,x)$ が

i) $t \in [a,b]$ について連続

ii) $x \in [\alpha,\beta]$ について連続的微分可能

iii) $(\partial/\partial x)f(t,x) = f_x(t,x)$ が t と x の 2 変数に対して連続 (あるいは x についての連続性が t に関して一様)

とすると

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^b f(t,x)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(t,x)dt$$

つまり積分と微分の順序を交換してよい

[**連続函数の応用**]

[**単純な曲線**] (simple curve or Jordan 曲線)
$x(t)$, $y(t)$ ($t \in [a,b]$ or $[0,1]$): 連続函数として

$$\gamma = \{(x(t), y(t)); t \in [a,b]\}$$

with

$$(x(t_1), y(t_1)) \neq (x(t_2), y(t_2)) \quad \text{for} \quad t_1 \neq t_2 \qquad \text{(重複点がない)}$$

さらに

$$(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$$

のとき単純な閉曲線 (simple closed curve) という

(性質)

1) 単純な閉曲線は平面を内部と外部に分ける

2) P を単純な閉曲線の点、Q を閉曲線上にない点とすると、Q が内部にあれば線分 $\overline{QP}$ と x 軸との角度は P が閉曲線上を 1 周することによって $\pm 2\pi$ だけかわる。2π のとき反時計まわり (counterclockwise) にまわるという。(偏角の定義と同じ) Q が外部なら角度の変化はなし

∘ 単純な閉曲線によってかこまれる開集合を「領域」(region) という。境界を付け加えたものは閉領域 (closed region)。これは当然有界閉集合、つまり compact である。より正確には、「領域 $\equiv$ 連結された開集合」として定義される。以下、複素函数はこうした複素平面上の「領域」で考える

1.2.5　一様収束

ある有界閉領域で定義された z の連続函数の級数

$$f(z) = u_1(z) + u_2(z) + \cdots = f_N(z) + R_N(z) \qquad \text{with} \qquad R_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(z)$$

を考える。$f(z)$ が連続であるためには収束の一様収束性がいる (十分条件)。すなわち

$$^{\forall}\varepsilon > 0 \qquad {}^{\exists}N \qquad \langle\langle \quad |R_n(z)| < \varepsilon \quad \text{for} \quad {}^{\forall}n > N \quad \rangle\rangle$$

ここに $\boxed{N\text{: independent of } z}$ が重要。一方 $f_n(z)$ の一様連続性から

$$|f_n(z) - f_n(z')| < \varepsilon \quad \text{for} \quad |z - z'| < \delta$$

そこで

$$\begin{aligned} &|f(z) - f(z')| = |(f_n(z) + R_n(z)) - (f_n(z') - R_n(z'))| \\ &< |f_n(z) - f_n(z')| + |R_n(z)| + |R_n(z')| < 3\,\varepsilon \end{aligned}$$

∘ 同様に積分可能な函数の級数が項別積分できるためには、級数の一様収束性が必要

絶対収束級数: 無限級数が有限級数のように、掛けたり、項の順序をかえたりしてもよいようになる
一様収束級数: 無限級数が有限級数のように、各項が連続のとき、その無限和が連続になったり、項別積分できるようになる

(一様収束でない例)

$$\begin{aligned} &f(x) = u_1(z) + u_2(z) + \cdots \\ &u_1(x) = x \\ &u_n(x) = x^{\frac{1}{2n-1}} - x^{\frac{1}{2n-3}} \qquad (n \geq 2) \end{aligned}$$

部分和は

$$f_n(x) = x^{\frac{1}{2n-1}} \qquad \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \qquad \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \qquad \text{不連続}$$

で、各点で絶対収束である。しかし、$x = 0$ の近傍では n をいくら大きくとっても剰余項 $R_n(x)$ が小さくならない

$$R_n(x) = 1 - x^{\frac{1}{2n-1}} \qquad \text{for} \qquad x > 0$$

$x = e^{-(2n-1)}$ ととると $R_n(x) = 1 - 1/e$: 有限の値！ $\longrightarrow$ $x = 0$ で一様収束でない。

(注意)　一様収束性は必要条件ではない。つまり、一様収束でなくてもその級数が連続であることはあり得る
$Cf.$ 「解析概論」にあげられている例

1.3 指数函数、対数函数

$$\exp z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

で $\exp z$ を定義する
$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n\to\infty} 1/(n+1) = 0$ より収束半径は ∞. すなわち全複素平面で絶対一様収束 $\longrightarrow$ 何回でも微分、積分できて、それらの収束半径も ∞. 例えば

$$\text{連続性：} \qquad \lim_{z\to\zeta} \exp z = \exp \zeta$$

[**加法定理**]

$$\begin{aligned}
&\exp z_1 \ \exp z_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{z_1}^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{{z_2}^m}{m!} \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{n+m=N} \frac{N!}{n!m!} {z_1}^n {z_2}^m = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} (z_1 + z_2)^N \qquad (\longleftarrow \quad 2\,\text{項定理}) \\
&= \exp(z_1 + z_2)
\end{aligned}$$

(絶対収束だから項の組み替えが自由にできる)

帰納法により

$$\exp z_1 \ \exp z_2 \cdots \exp z_n == \exp(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)$$

特に

$$\exp z\ \ \exp(-z)=\exp 0=1 \quad\longrightarrow\quad \exp z\neq 0 \quad \text{for} \quad {}^{\forall}z\in \boldsymbol{C}$$

z が real $(z=x)$ のとき

$$\exp x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\geq 1 \qquad \text{for} \qquad x>0$$

$x<0$ のとき

$$\exp x=\frac{1}{\exp(-x)}>0 \qquad \text{かつ} \qquad \exp\ \ x\leq 1$$

$\exp x$ は単調増大函数. つまり

$$\exp(x+h)-\exp x=\exp x(\exp h-1)>0 \qquad \text{for} \qquad h>0$$

[**微分**]

$$\frac{\exp h-1}{h}=1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\cdots$$

は連続より

$$\lim_{h\to 0}\frac{\exp h-1}{h}=1$$

そこで

$$\frac{d}{dz}\exp z=\lim_{h\to 0}\frac{\exp(z+h)-\exp z}{h}=\exp z$$

$f(z)=\exp\ \ z$ が

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=2.71828\cdots$$

の z 乗となっていることは、z が有理数までの場合には $\exp z_1\ \ \exp z_2\cdots\exp z_n\ =\exp(z_1+z_2+\cdots+z_n)$ を使って容易に証明できる。実数の場合と複素数の場合には e^z は $\exp z$ のことと理解すべきである。

[**正の数の対数**]

$x\in\boldsymbol{R}$ のとき、e^x は $0\to\infty$ への単調増大函数なので逆函数が存在する。つまり $a>0$ に対して

$$e^x=a \qquad x=\mathrm{Log}\ a$$

x を正の数 a の対数という
$\mathrm{Log}\ a$ は $-\infty \to \infty$ への単調増大連続函数. さらに

$$\mathrm{Log}\ a + \mathrm{Log}\ b = \mathrm{Log}\ ab$$

等が簡単に示せる

[**対数の微分**]
　$a > 0$ のとき

$$\begin{aligned}&\frac{d\ \mathrm{Log}\ a}{d\ a} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{Log}(a+h) - \mathrm{Log}\ a}{h} = \lim_{k\to 0}\frac{k}{e^{x+k} - e^x}\\ &= \frac{1}{e^x}\lim_{k\to 0}\frac{k}{e^k - 1} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{a}\end{aligned}$$

そこで $\mathrm{Log}\ 1 = 0$ より

$$\mathrm{Log}\ a = \int_1^a \frac{d\ t}{t}$$

[**Log** $(1+a)$ **のベキ展開**]

$$\begin{aligned}&\mathrm{Log}\ (1+a) = \int_1^{1+a}\frac{d\ t}{t} = \int_0^a \frac{d\ t}{1+t} = \int_0^a \left\{\frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} + \frac{(-t)^n}{1-(-t)}\right\}\ d\ t\\ &= \int_0^a \left\{1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-t)^n}{1-(-t)}\right\}\ d\ t\\ &= a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{a^n}{n} + R_n\\ &\text{ここに}\qquad R_n = (-1)^n\int_0^a \frac{t^n}{1+t}\ d\ t\end{aligned}$$

特に $-1 < a < 1$ なら

$$|R_n| \leq \int_0^{|a|} t^n \frac{1}{1-|a|}\ d\ t = \frac{|a|^{n+1}}{n+1}\frac{1}{1-|a|} \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

従って $-1 < a < 1$ のとき

$$\mathrm{Log}\ (1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a^n}{n}$$

と無限級数展開できる。収束半径 1 の絶対一様収束である
もし $a = 1$ なら

$$|R_n| = \int_0^1 t^n \frac{1}{1+t}\ d\ t < \int_0^1 t^n\ d\ t = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

従って展開は $a=1$ でも可能で

$$\mathrm{Log}\ 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

$a=-1$ の場合は発散

(応用)

$$\lim_{n\to\infty} n\ \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} - \cdots\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \cdots\right) = 1$$

より

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1$$

そこで $a_n = \mathrm{Log}(1+1/n)^n$ とすると $(1+1/n)^n = e^{a_n}$ より

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{\lim_{n\to\infty} a_n} = e^1 = e$$

ここから

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \qquad \text{(通常の定義)}$$

がでる

[三角函数]

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots$$
$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right)$$

(絶対収束するから組み替え可能) より

$$\cos\ z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \qquad \text{even 函数}$$
$$\sin\ z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \qquad \text{odd 函数}$$

により sine、cosine 函数を定義する
いずれも全複素平面で絶対一様収束する連続 (微分可能、実は解析的) 函数である
同様に

$$\frac{\sin\ z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots$$

等も $z=0$ で連続 ($\lim_{z\to 0}\sin\ z/z=1$) な解析函数である

$$e^{i(z_1+z_2)}=e^{iz_1}e^{iz_2}$$

から三角法の加法定理がでる
また

$$(\cos z)^2+(\sin z)^2=\frac{1}{4}\left(e^{2iz}+2+e^{-2iz}\right)-\frac{1}{4}\left(e^{2iz}-2+e^{-2iz}\right)=1$$

($(\cos x)^2+(\sin x)^2=1 \quad \text{for} \quad x\in \boldsymbol{R}$ の解析接続)
　また $e^{iz}=\cos\ z+i\ \sin\ z$ を微分することにより

$$\frac{d}{dz}\cos z=-\sin z \qquad \frac{d}{dz}\sin z=\cos z$$

[**指数函数の周期性**]

$$e^{z_1}=e^{z_2}$$

とする e^{-z_2} をかけて加法定理を使うと

$$e^{z_1-z_2}=e^0=1$$

$\gamma=z_1-z_2$ とすると $e^\gamma=1$ より

$$e^{(z+n\gamma)}=e^z(e^\gamma)^n=e^z$$

従って e^z は z の周期函数 $\longrightarrow$ γ は実は $2\pi i$ の整数倍
$e^\gamma=1$ の解を考える
$\gamma=a+i\beta$ ($a,\ \beta\in\boldsymbol{R}$) とすると

$$\left(\begin{array}{l} e^a\ \cos\ \beta=1 \\ e^a\ \sin\ \beta=0 \end{array}\right. \to e^{2a}=1\longrightarrow a=0$$

そこで $\gamma=i\beta$ は $\cos\beta=1$ を満たす
$\cos\beta=1$ のかわりに $\cos x=0$ を考える
$\cos x=0$ なら倍角公式により

$$\begin{aligned}&\cos 2x=2\cos^2 x-1=-1\\ &\cos 4x=2(\cos 2x)^2-1=2(-1)^2-1=1 \quad\longrightarrow\quad \beta=4x\end{aligned}$$

このような x で最小のものを見出す $\longrightarrow$ 実は $x=\pi/2\longrightarrow\beta=2\pi$
そのような解は $[\sqrt{2},2]$ の閉区間内にある (ただ一つ) (詳細は省略)

それを $\pi/2$ と名づける: $\quad \pi/2 = 3.14159\ldots/2 = 1.57098\cdots$

$$
\begin{aligned}
&\cos\ \pi = -1\\
&\cos\ 2\pi = 1\\
&\quad\vdots\\
&\cos\ n\pi = (-1)^n \longrightarrow \sin\ n\pi = 0\\
&\cos\ 2n\pi = 1 \qquad \text{for} \qquad {}^\forall n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots
\end{aligned}
$$

従って $\qquad e^z = e^{z+2n\pi i}$

[sine、cosine 函数の主値、複素数の主値]

$$
\left(\begin{array}{l}\cos\ \theta = \lambda\\ \sin\ \theta = \mu\end{array}\right. \qquad (\lambda^2+\mu^2=1)
$$

の**主値**として $-\pi < \phi \leq \pi$ のものをとる

$$
z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (\text{Euler の公式})
$$

は

$$
\theta = \phi + 2\pi i \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots) \qquad ここに \qquad \theta = \arg\ z \quad r = |z|
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
\log z &= \log|z| + i\ \arg\ z = \mathrm{Log}\,|z| + i\phi + 2\pi i n\\
&= \mathrm{Log} z + 2\pi i n
\end{aligned}
$$

ここに

$$
\mathrm{Log} z = \mathrm{Log}\,|z| + i\phi \qquad \text{with} \qquad -\pi < \phi \leq \pi
$$

は $\log z$ の主値

[$\boldsymbol{a^z}$ の定義] $a \neq 0$ のとき

$$
a^z = e^{z\log a}
$$

により a^z を定義すると a^z は z と a の連続函数である

$$
a^z = e^{z\log a} = e^{z(\mathrm{Log}\, a + 2\pi i n)} \qquad \text{with} \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2.\ \cdots
$$

z は全複素平面で考えられるが a については原点から cut を入れて branch (枝) を指定してやらないと値は決らない

例えば

$$
\begin{aligned}
\sqrt{z} &= e^{\frac{1}{2}\log z} = e^{\frac{1}{2}(\mathrm{Log}\, z + 2\pi i n)}\\
&= (-1)^n e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}\, z}\ : \qquad n = 0 \quad なら主値
\end{aligned}
$$

(練習)

1) $a \neq 0$ のとき a^z の描く spiral 角は a に無関係に一定であることを示せ

2) $y = x^x = e^{x \log x}$ $(x \in \boldsymbol{R})$ を考える。$dy/dx = x^x(1 + \log x)$ であるが

$$\begin{aligned} &x > 0 \quad \text{なら} \quad y = \text{real} \quad dy/dx = \text{real} \\ &x < 0 \quad \text{なら} \quad \text{一般には} \quad y,\ dy/dx = \text{complex} \end{aligned}$$

しかし、$x < 0$ で $x = q/(2p+1)$ ($p,\ q$ は正 or 負の整数) のとき $y = x^x$ は real (に選べる)。実際

$$y = \left(\frac{q}{2p+1}\right)^{\frac{q}{2p+1}}$$

より

$$\begin{aligned} &y^{2p+1} = \left(\frac{q}{2p+1}\right)^q = \left(-\left|\frac{q}{2p+1}\right|\right)^q = (-1)^q \left|\frac{q}{2p+1}\right|^q \\ &q \quad \text{偶数なら} \quad y > 0 \quad \text{で} \quad y = \left|\frac{q}{2p+1}\right|^{\frac{q}{2p+1}} \\ &q \quad \text{奇数なら} \quad y < 0 \quad \text{で} \quad y = -\left|\frac{q}{2p+1}\right|^{\frac{q}{2p+1}} \end{aligned}$$

そこで有理数の点に対して $y = x^x$ の微分を考えて

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{x+h} - x^x}{h}$$

とすると dy/dx は real となる。このことは dy/dx が一般には complex であることと矛盾するように思えるが、上の推論のどこが間違っているか?

(応用) 散乱理論では

$$E = |E| e^{i\theta} \qquad 0 \leq \theta < 2\pi$$

として、正の実軸に cut を入れる (Riemann 面)

$$-E = -|E| e^{i\theta} = |E| e^{i(\theta - \pi + 2n\pi)} \qquad \text{with} \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

$\theta = \pi$ のとき $-E = |E| > 0$ になるようにする。つまり $n = 0$ の主値をとると

$$-E = -|E| e^{i\theta} = |E| e^{i(\theta - \pi)}$$

このとき $-\pi/2 \leq (\theta - \pi)/2 < \pi/2$ より

$$\Re e \sqrt{-E} = \sqrt{|E|} \cos\left(\frac{\theta - \pi}{2}\right) > 0 \qquad \text{物理的分岐面}$$

cut を横切って下をまわると (主値でない) $-2\pi < \theta \leq 0$ より $-3\pi/2 \leq (\theta-\pi)/2 < -\pi/2$ だから

$$\Re e\sqrt{-E} = \sqrt{|E|}\cos\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right) < 0 \qquad \text{非物理的分岐面}$$

(散乱振幅等の) 解析性を考えるときは **物理的分岐面** だけで考える。すなわち cut の上端では $\theta = 0$ より

$$\sqrt{-E} = \sqrt{|E|}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\sqrt{E}$$

cut の下端では $\theta = 2\pi$ より

$$\sqrt{-E} = \sqrt{|E|}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{E}$$

これらは互いに complex conjugate の関係にある
(ランダウ・リフシッツ量子力学 II 巻, p. 571 脚注参照)

1.4 領域、単連結、ホモトープ

高木貞治: 解析概論 (岩波)

H. Cartan: 複素函数論 (〃)

領域 (D) : 連結された開集合 (2 つの空でない開集合に分けられない)

$$(D = O_1 \cup O_2 \quad O_1 \cap O_2 = \phi \quad O_1,\ O_2 \neq \phi \qquad \text{とできない})$$

(例) 単純 (交わりのない) 閉曲線 で囲まれる領域 。中抜きのドーナツ。一方、二つの分離した領域は連結していない

「複素平面上の領域 D 内の任意の 2 点は単純な曲線 (以下、経路という) で結べる」

(証明) 点 a を固定して

$$\begin{aligned} A &= \{x \in D\ ;\ a \text{ と結べる点の集合}\} \\ B &= \{x \in D\ ;\ a \text{ と結べない} \quad〃 \quad\} \end{aligned}$$

とすると

$$D = A \cup B \qquad A \cap B = \phi \qquad \text{かつ } A \neq \phi$$

a の近傍内の点はすべて a と結べる。A 内の任意の点の近傍内の点も同様 $\longrightarrow$ A は開集合。実は B も開集合。実際 $x \in B$ とすると x の近傍内の点は a と結べないはず

(結べるとすると x が a と結べることになり x の仮定に反する) 一方、D は連結より $A=\phi$ or $B=\phi$. $A\neq\phi$ より $B=\phi$. つまり $A=D$

単連結領域 : D 内に含まれる**すべての**単純閉曲線の内点がすべて D に属する $\equiv$ すべての閉じた経路 (単純閉曲線) が 1 点にホモトープである

ホモトープの概念 : ”連続的変形”
単純な曲線 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ が連続的に変形していけるとき、これらは「同じホモトープ類に属する」という

単連結にするための工夫 : 線をひく。cut を入れる (Riemann 面) 等 $\cdots$

(注意)　D を単連結領域にとっておけば、そこで正則 (微分可能) な函数 $f(z)$ は $^\forall\gamma$ (単純閉曲線) に対して

$$\int_\gamma f(z)dz=0 \qquad \text{(Cauchy の定理)}$$

2　解析函数

2.1　線積分

「複素積分 $\equiv$ ある経路にそった積分」
$f(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$: $z=x+iy$ の函数とする
単純な曲線 γ にそって連続であることを仮定する

$$\begin{aligned}&\gamma\ :\ \gamma(t)=(x(t),y(t)) \qquad t\in[0,1] \qquad (\gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)\quad \text{for}\quad t_1\neq t_2)\\&\gamma(0)=z_0, \quad \gamma(1)=z\end{aligned}$$

さらに $x(t)$, $y(t)$ は連続的微分可能 ($\dot{x}(t)=dx(t)/dt$, $\dot{y}(t)=dy(t)/dt$ が連続) とする

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &\equiv \int_0^1 (P+iQ)\left(\frac{dx}{dt}+i\frac{dy}{dt}\right)dt\\&=\int_0^1 P\dot{x}dt-\int_0^1 Q\dot{y}dt+i\left(\int_0^1 P\dot{y}dt+\int_0^1 Q\dot{x}dt\right)\end{aligned}$$

曲線 γ の「長さ」は

$$\ell=\int_0^1\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2}dt$$

(練習) $z=z_0+(z-z_0)t$ with $t\in[0,1]$ に対して

$$\begin{aligned}&\int_{z_0}^z dz=z-z_0\\&\int_{z_0}^z zdz=\frac{1}{2}(z^2-{z_0}^2)=F(z)-F(z_0)\end{aligned}$$

を示せ。ここに $F(z)=z^2/2$ を $f(z)=z$ の原始函数という。実は、γ は区分的に連続的微分可能であればよい。例えば、$A=(x_0,y_0)$, $B=(x,y)$, $C=(x,y_0)$ or $C=(x_0,y)$ として

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = \int_{AC} f(z)dz + \int_{CB} f(z)dz$$

を示せ

「始点と終点だけによって、経路によらないことが重要」

○ 上の定義は通常の Riemann 積分の定義と consistent。つまり

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1} f(\xi_n^{(N)})(z_{n+1}^{(N)}-z_n^{(N)})$$

ここに

$$\begin{aligned}&0=t_0^{(N)}<t_1^{(N)}<\cdots<t_n^{(N)}=1 \qquad |t_{n+1}^{(N)}-t_n^{(N)}|<\delta\longrightarrow 0\\ &z_n^{(N)}=(x_n^{(N)},y_n^{(N)})=\gamma(t_n^{(N)}) \qquad \xi_n^{(N)}\in\left\{\gamma(t);t_n^{(N)}<t<t_{n+1}^{(N)}\right\}\end{aligned}$$

(証明) $f(\xi_n^{(N)})$ と $z_n^{(N)}$ を実部と虚部に分ければ、合成函数の積分に帰着される

○ $\gamma(t)$ 上で $|f(z)|<M$ なら

$$\left|\int_{z_0}^{z} f(z)dz\right| \le \int_0^1 |f(z)||\dot{x}+i\dot{y}|dt \le M\int_0^1\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}dt = M\ell$$

2.1.1 微分形式

複素平面上の領域 D で連続な値をとる函数 $P=P(x,y)$, $Q=Q(x,y)$ に対して

$$\omega = Pdx+Qdy$$

を D 上の微分形式 (differential form) という。(区分的に) 連続的微分可能な経路

$$\gamma(t)=(x(t),y(t)) \qquad t\in[0,1] \qquad \gamma(0)=z_0,\quad \gamma(1)=z$$

に対して、その積分を

$$\begin{aligned}&\int_\gamma \omega = \int_\gamma (Pdx+Qdy)\\ &\equiv \int_0^1 (P\dot{x}+Q\dot{y})dt = \int_0^1\left(P(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt}+Q(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt}\right)dt\\ &=\int_0^1 f(t)dt\end{aligned}$$

で定義する

∘ t をさらに

$$\begin{aligned} & t = t(u) \quad (\text{連続的微分可能}) \quad u \in [0,1] \\ & t(0) = 0, \quad t(1) = 1 \quad \text{and} \quad {}^{\forall}\dot{t}(u) > 0 \quad (\text{単調増大}) \end{aligned}$$

として

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(t(u))\dot{t}(u)du$$

は不変

　$u \to \gamma(t(u)) = \gamma_1(u)$: 新しいパラメータへの変換

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

∘ $t(u) = 1 - u$ with $u \in [0,1]$ とすると

$$t(0) = 1, \quad t(1) = 0 \quad \text{and} \quad \dot{t}(u) = -1 < 0 (\text{単調減少})$$

として

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \omega &= \int_0^1 f(t(u))\dot{t}(u)du = \int_1^0 f(t)dt \\ &= -\int_0^1 f(t)dt = -\int_\gamma \omega \end{aligned}$$

この時、パラメータの変更により γ の向きが変わったといい、$\gamma_1 = -\gamma$ と書く

2.1.2　微分形式の原始函数

　「領域 D で定義された微分形式 $\omega = Pdx + Qdy$ が連続的微分可能な函数 F を用いて $\omega = dF$ と書けるとき F を原始函数という」

　このとき

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \qquad \text{かつ} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q \qquad (1)$$

また、D 内の任意の 2 点, z_0, z を結ぶ区分的に微分可能な経路 $\gamma(t)$ に対して

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma dF = F(z) - F(z_0)$$

もし、D 内で常に $dF=0$ なら $F(z)=\mathrm{const.}$ すなわち、原始関数は定数値を除いて一意的　　(なぜなら $d(F-G)=0 \to F=G+\mathrm{const}$)

[**命題 1**] 微分形式 ω が領域 D 内で原始函数をもつ
$\Longleftrightarrow$ D 内の任意の閉じた経路 γ に対して

$$\int_\gamma \omega = 0$$

(証明) $\Longrightarrow$　$z=z_0$ より O.K.
$\Longleftarrow$　${}^\forall z_0,\ z \in\ D$ に対して経路のとり方によらず

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega = \cdots$$

は $z=(x,y)$ (と $z_0=(x_0,y_0)$) だけによる。それを $F(x,y)$ とかくと

$$\int_\gamma \omega = F(x,y)$$

x 軸にそって

$$F(x+h,y)-F(x,y) = \int_\gamma (Pdx+Qdy) = \int_x^{x+h} P(\xi,y)\,d\xi$$

$$\text{or} \qquad \frac{F(x+h,y)-F(x,y)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} P(\xi,y)\,d\xi$$

$P(x,y)$ は連続より $h\to 0$ へいって

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$$

同様に

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$$

つまり $F(x,y)$ は連続的微分可能

∘ 上の証明の最後の部分は、実は D 内の任意の長方形 R で、その辺がそれぞれの座標系に平行なものについて $\int_{\partial R}\omega=0$ (∂R は R の周辺) であれば、原始函数が存在する事を示している。しかし、この条件は、一般の領域では満たされない。そのためには D の単連結性が必要である。**単連結領域**の例として D を開円板と仮定する。

[**命題 2**] 領域 D は開円板 (or ある近傍) とする。長方形 R が D 内に含まれ、その各辺が座標系に平行ならば常に

$$\int_{\partial R} \omega = 0$$

$\Longrightarrow \omega$ は D 内で原始函数をもつ

(証明) γ_1 と γ_2 を長方形の対角上の二つの頂点 z_0 と z を結ぶ各辺にそった径路として

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

であるので、命題 1 と同様にして、原始函数がつくれる。他の経路についても同じ値が対応することは命題 1 から明らか

[**命題 3**] 領域 D 内の微分形式 $\omega = Pdx + Qdy$ に対して、$\partial P/\partial y$ および $\partial Q/\partial x$ が D 内で存在して、それが**連続**であると仮定する。このとき ω が D で原始函数をもつなら

$$\Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{on} \quad D \qquad\qquad (2)$$

D が開円板なら $\Longleftarrow$ も O.K.

(証明)

$\Longrightarrow$: D の任意の点の近傍内に含まれる任意の長方形を R として、命題 1 より $\int_{\partial R} \omega = 0$. 長方形に対する Green-Riemann の公式

$$\int_{\partial R} Pdx + Qdy = \int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

を使うと、これは

$$\int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

と同じ。ここから $\partial Q/\partial x$, $\partial P/\partial y$ の連続性を仮定すると

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad \text{in} \quad {}^\forall(x,y) \in R$$

が示せる。実際、${}^\exists(x,y) \in R$ で $\partial Q/\partial x \neq \partial P/\partial y$ とすると、例えば

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$$

となり、この点を含むより小さな長方形 R' で

$$\int\int_{R'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy > 0$$

となり、仮定に反する。R は今考えている D の任意の点を含む様に出来るから、D 上で 常に $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ が示される

$\Longleftarrow$: 上の Green-Riemann の公式を用いれば命題 2 から自明

$\circ$ 複素数値函数 $f(z)$ からつくられる微分形式 $\omega = f(z)dz = (u+iv)(dx+idy)$ 対しては $P = u+iv$, $Q = -v+iu$ より条件 (2) は Cauchy-Riemann の方程式

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$
$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \qquad (3)$$

となる。従って開円板に対しては簡単に Cauchy の定理が証明できると思えるかもしれないが、実際には (3) の偏微分係数の連続性がいる。これは Taylor 展開のところまでいってはじめて証明される

$\circ$ 外微分形式の言葉では

$$\begin{aligned} d\omega &= d(Pdx+Qdy) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) \wedge dx = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

より (2) の条件は $d\omega = 0$. これを「連続的微分可能な」微分形式 ω が**閉じている**という。閉じた微分形式には 2 回連続的微分可能な原始函数 u が存在する。すなわち $\omega = du$

$\circ$ (1) と (2) を結びつけると

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

すなわち、右辺と左辺が連続なら、当然成り立つべき式である。これは $d^2 u = 0$ に対応する (右辺と左辺が連続なら、これらは等しい)

2.1.3 閉じた微分形式

[**定義**] 「領域 D で微分形式 $\omega = Pdx + Qdy$ (P, Q は連続) が閉じているとは、D の任意の点 (x_0, y_0) に対して、その或る近傍 (or 開円板) で ω が原始函数をもつことであると定義する。つまり
閉じている $\sim$ 局所的原始函数の存在」

[**命題 4**] 領域 D 内で連続な係数をもつ微分形式 ω が閉じている
$\Longleftrightarrow$ D 内に、**その内部もこめて**含まれ、各辺が座標軸に平行な任意の長方形 R に対して常に

$$\int_{\partial R} \omega = 0$$

もし $P,\ Q$ が**連続的微分可能**なら

$$\omega \text{ が閉じている} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{on} \quad D$$

(証明)

(前半) $\Longrightarrow$: D に含まれる任意の長方形 R に対して、それを有限個の小さい長方形の集合 $\{R_m\}_{m=1\sim n}$ に分割して

$$\int_{\partial R} \omega = \sum_{m=1}^{n} \int_{\partial R_m} \omega$$

と出来る。一方 D の各点 $z_0 = x_0 + iy_0$ を中心にもつ円板の集合 $\{V_\varepsilon(z_0)\}_{z_0 \in D}$ (ε は z_0 により決まる) を考えて

$$R \subset \cup_{z_0 \in D} V_\varepsilon(z_0)$$

とすると R は compact だから、ここから有限個の円板を選び出して、それだけで R をおおう様に出来る。

$$R \subset \cup_{\ell=1}^{k} V_\varepsilon(z_\ell)$$

上の R の分割を十分小さくとると、すべての R_m について、それが $\{V_\varepsilon(z_\ell)\}_{\ell=1\sim k}$ のどれかに完全に含まれる様にする事ができる。$V_\varepsilon(z_\ell)$ では原始函数が存在するから、命題 1 より

$$\int_{\partial R_m} \omega = 0 \qquad \text{そこで} \qquad \int_{\partial R} \omega = 0$$

(前半) $\Longleftarrow$ は命題 2 より自明

(後半) $\Longrightarrow$: 命題 3 の前半より D の任意の点の或る近傍で $\partial Q/\partial y = \partial P/\partial x$ が成り立つ。つまり D 全体で O.K.

(後半) $\Longleftarrow$: 命題 3 後半より明らか

$\circ$ 命題 2 より開円板で閉じた微分形式は原始函数をもつ

[**経路にそった原始函数**]

以下すべて ω を D で定義された閉じた微分形式とする (連続的微分可能性は仮定しない)。ω は 全体で一価の原始函数をもつとはかぎらないが、D のある経路 γ にそっての原始函数というものは定義できる。

実際 ω は γ 上の任意の点の或る近傍で原始函数を持つが、γ は D 内で compact よりそこから有限個の近傍を選び出して γ 全体をおおう事ができる。2 つの重なった近傍の共通部分における 2 つの原始函数の値の差は、それらが共通の微分係数をもつことから一定である。従って一方の定数を調整することにより 2 つの近傍にまたがる原始函数をその近傍の合併部分においてつくることが出来る。この操作を有限回くり返して γ を含む D のある部分領域で定義された原始函数を得る。こうして得られた原始函数は任意定数を除いて一定である。定理のかたちで述べると

[**定理 1**] 連続函数 P, Q を持つ、領域 D で定義された、閉じた微分形式 $\omega = Pdx+Qdy$ は、D 内の経路 γ を含む或る領域で原始関数を持つ。このような原始函数は、任意定数を除いて一意的である

[**定理 2**] 定理 1 と同じ条件のもとに

1) D 内の経路 γ_0, γ_1 が両端を固定してホモトープなら

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

2) D 内の 2 つの閉じた路が、閉じた路としてホモトープなら

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

(証明)

1) $I = [0,1]$ として $I \times I \to D$ への連続写像 $\delta : (t,u) \to \delta(t,u)$ が

$$\delta(t,0) = \gamma_0(t)\ , \qquad \delta(t,1) = \gamma_1(t)$$
$$\delta(0,u) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)\ , \qquad \delta(1,u) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$$

を満たす場合である。このとき $I \times I$ は compact だから $\delta(I,I)$ も compact で、それは γ_0 と γ_1 でかこまれる領域を完全におおっている。従って、$\delta(I,I)$ をおおう無限個の開被覆から有限個の近傍をとり出して、それで γ_0 と γ_1 でかこまれる領域を完全におおうことができる。再び各局所的原始函数の定数を選んで、有限回の操作でそこでの原始函数を定義出来る。従って当然

$$\int_{\gamma_0} \omega + \int_{-\gamma_1} \omega = 0$$

2) この場合は

$$\delta(t,0) = \gamma_0(t)\ , \qquad \delta(t,1) = \gamma_1(t)$$
$$\delta(0,u) = \delta(1,u) \qquad \text{for} \quad {}^{\forall}u \in I$$

である

右の例では

$$\int_{\gamma_1^{(1)}} - \int_{\gamma_0^{(2)}} = 0\ , \qquad \int_{\gamma_0^{(1)}} - \int_{\gamma_1^{(2)}} = 0$$

そこで

$$\int_{\gamma_0} = \int_{\gamma_0^{(1)}} + \int_{\gamma_0^{(2)}} = \int_{\gamma_1^{(2)}} + \int_{\gamma_1^{(1)}} = \int_{\gamma_1}$$

右の例では外側の閉曲線と内側の閉曲線との間に 1 本線を入れて

$$\int_{\gamma_0} - \int_{\gamma_1} = 0 \qquad \text{より} \qquad \int_{\gamma_0} = \int_{\gamma_1}$$

(閉曲線は常に左まわりを正にとる)

[**定理 3**] **単連結**領域 D で閉じた微分形式 ω は D 全体で一価の原始函数をもつ

(証明) D が単連結であれば、D 内の任意の閉じた径路 γ は D 内の 1 点にホモトープであり、被積分函数は有界かつ γ の長さは無限に 0 に近づくから定理 2 の 2) により

$$\int_\gamma \omega = 0 \qquad \text{for} \quad {}^\forall\gamma \subset D$$

従って命題 1 より ω は D で原始函数をもつ

2.2 解析函数の基本諸定理

2.2.1 Cauchy - Riemann の関係

以下特にことわらない限り D を複素平面の領域 (連結開集合) とする

[**定義**] 「複素数値函数 $f(z)$ (1 価とする) が領域 D で正則 (regular, holomorphic, or 解析的 (analytic)) とは、D 内で

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = f'(z) \tag{1}$$

が h **の向きによらず**存在することである」

この時 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ として h の実軸と虚軸上からの極限が一致することにより

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{y}\right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{y}$$

より Cauchy - Riemann の関係

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

が成り立つ。また (2) があれば、(1) で h を複素平面の任意の向きから近づけても一定 (証明せよ)

○ 今 u, v の偏微分導関数の連続的微分可能性を仮定すると、(2) を満たせば u, v は調和函数。すなわち

$$\Delta u = 0\ , \qquad \Delta v = 0$$

○ $v =$ const $\longrightarrow u =$ const , $u =$ const $\longrightarrow v =$ const
また、$|f(z)| =$ const $\longrightarrow f(z) =$ const $(\leftarrow \log f(z) = \log|f(z)| + i \arg f(z))$
つまり、実部と虚部の間に強い関係がある

○ (2) は形式的に

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0$$

と書ける。実際、$x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/2i$ より

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

そこで

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad \text{from} \qquad (2)\end{aligned}$$

つまり

$$df(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z}dz + \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

だが $f(z)$ が analytic とは、2 項目がなること。例えば $|z|^2 = z\bar{z}$ より $f(z) = |z|$ 等は解析的でない

(注意)　$\partial/\partial\bar{z}$ の微分は形式的である。例えば $f(x)$ が微分可能実函数とするとき $f(z)$ は解析函数になりそうだが、この推論はまちがい。(何故か ?)
一般には解析接続でもない。
$u(x, y)$: 実調和函数なら $f(z) = 2u(z/2, z/2i) - u(0, 0)$ かつ $\Re e f(z) = u(x, y)$　(カルタンの教科書にある)

∘ 微分形式の言葉では
$f(z)$ が正則のとき、$\omega = f(z)dz$ を正則微分形式という。このとき

$$d\omega = df(z) \wedge dz = f'(z)dz \wedge dz = 0$$

つまり正則微分形式は「閉じている」　このとき、あとで証明される $f'(z)$ の連続性を了解している

2.2.2　原始函数の存在、Cauchy の定理

[**定理 4**] $f(z)$ が領域 D で正則なら、微分形式 $\omega = f(z)dz$ は D で閉じている。つまり、$^\forall z \in D$ に対して、その或る近傍で (局所的) に原始函数が存在する。領域 D が**単連結**なら D の全領域で (1 価の) 原始函数が存在する

(証明) 最後の部分は定理 3 による
$\omega = f(z)dz$ が D で閉じているということを示すためには、命題 4 により $f'(z)$ の連続性かあるいは D 内にその内部もこめて含まれ、各辺が座標軸に平行な任意の長方形 R に対して常に $\int_{\partial R} \omega = 0$ であることを言わなければならない。ここでは後者を示す。(前者はあとで分かる。)
まず

$$\int_{\partial R} f(z)dz = \eta(R)$$

とおく。R の各辺を 2 等分して 4 つの合同な長方形 R_i に分けると

$$\int_{\partial R} f(z)dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial R_i} f(z)dz = \sum_{i=1}^{4} \eta(R_i)$$

従って、4 つの R_i の少なくてもどれか 1 つに対して

$$|\eta(R_i)| \geq \frac{1}{4}|\eta(R)|$$

が成りたつ。これを $R^{(1)}$ とよぶ。この $R^{(1)}$ をさらに 4 等分して、そのうちの少なくとも 1 つ $R^{(2)}$ に対して

$$|\eta(R^{(2)})| \geq \frac{1}{4}|\eta(R^{(1)})| \geq \frac{1}{4^2}|\eta(R)|$$

これを次々に続けていけば、k 番目では

$$\left|\int_{\partial R^{(k)}} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4^k}|\eta(R)|$$

$R^{(k)}$ は $k \to \infty$ のとき 1 点 $z_0 \in R$ に収束する。$R \subset D$ から $z_0 \in D$ より z_0 の任意の近傍 $(\subset D)$

$$V(z_0) = \{z; |z - z_0| < \delta\} \qquad (\delta > 0)$$

に対して、$^{\exists}n$

$$R^{(k)} \subset V(z_0) \qquad \text{for} \qquad {}^{\forall}k > n$$

とできる。一方、$f(z)$ は $z = z_0$ で正則より

$${}^{\forall}\varepsilon > 0 \qquad {}^{\exists}\delta > 0 \qquad \langle\langle \quad \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon \quad \text{for} \quad |z - z_0| < \delta \quad \rangle\rangle$$

あるいは

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + v(z, z_0)(z - z_0)$$

として

$$|v(z, z_0)| < \varepsilon \qquad \text{for} \qquad |z - z_0| < \delta$$

そこで $z \in \partial R^{(k)}$ は $z \in V(z_0)$ より

$$\int_{\partial R^{(k)}} f(z)dz = (f(z_0) - z_0 f'(z_0)) \int_{\partial R^{(k)}} dz + f'(z_0) \int_{\partial R^{(k)}} zdz + \int_{\partial R^{(k)}} v(z, z_0)(z - z_0)dz$$

ここに

$$\int_{\partial R^{(k)}} dz = \int_{\partial R^{(k)}} zdz = 0$$

より

$$\left|\int_{\partial R^{(k)}} f(z)dz\right| \leq \int_{\partial R^{(k)}} |v(z, z_0)||z - z_0||dz| \leq \varepsilon \int_{\partial R^{(k)}} |z - z_0||dz|$$

ここで $R^{(k)}$ の対角線の長さを d_k、周の長さを L_k とすると右辺は $\leq \varepsilon d_k L_k$
d, L をもとの長方形 R の対角線の長さと周の長さとすると

$$d_k = \frac{d}{2^k}\ , \qquad L_k = \frac{L}{2^k}$$

より

$$\left|\int_{\partial R^{(k)}} f(z)dz\right| \leq \frac{1}{4^k}\varepsilon dL$$

始めの式とあわせて

$$\frac{1}{4^k}|\eta(R)| \leq \frac{1}{4^k}\varepsilon dL \qquad \text{or} \qquad |\eta(R)| \leq \varepsilon dL$$

ε は任意に小さくとれるから $\eta(R)=0$

[**Cauchy の定理**] $f(z)$ が領域 D 上で正則で、単純な閉曲線 γ も、その内部もすべて D に含まれるなら

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

(証明) この時、上の定理 4 より微分形式 $f(z)dz$ は D で閉じており、γ は 1 点にホモトープ故、定理 2 の 2) と定理 3 と同じ推論により命題が従う

定理 4 の D 内での $f(z)$ の正則性の条件は次のようにゆるめる事ができる

[**定理** $4'$] $f(z)$ が領域 D で連続で、実軸 (or 虚軸) に平行なある直線 Δ 上の点を除いて D 内で正則であるとする。このとき $f(z)dz$ は閉じた微分形式である

(証明) Δ を辺とする長方形がそれにそった辺をもつ長方形の列の極限として得られることを利用する

[**Schwarz の鏡像原理**] 上半平面で $f(z)$ が解析的、かつ実軸上で連続なら $f(z)=\bar{f}(\bar{z})$ により下半面へ解析接続される (あとで示す Morera の定理の応用)

2.2.3　Cauchy の積分公式、Taylor 展開

[**Cauchy の積分公式**] 単純な閉曲線 C の内部、および周上で $f(z)$ が正則なら、C の任意の内部の点 a について

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

(証明) C を連続変形して a を囲む小さな半径 ε の円 c にする

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-a}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{i\theta})id\theta \longrightarrow f(a) \qquad \text{as} \qquad \varepsilon\to 0\end{aligned}$$

($f(z)$ の θ についての一様連続性を使った)

[**Taylor 展開**] $f(z)$ が領域 D で正則なら、D 内の任意の点で Taylor 展開可能

(証明) a を中心として D に接する最大の円を K、その半径を r_0 とする。z を K 内の点として $|z-a|<r_0$ なる z を考える。そのとき $\rho=|z-a|$ として $\rho<r<r_0$ な

る半径 r の円を C として、その上の点を $\xi \in C$ とする。$|\xi - a| = r$ である。Cauchy の積分公式より

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

ここで

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - a) - (z - a)} = \frac{1}{(\xi - a)\left(1 - \frac{z-a}{\xi-a}\right)} = \frac{1}{\xi - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n$$

と展開できる。この無限級数は ξ について絶対一様収束である。実際 $M = \sup_{\xi\in C}|f(\xi)|$ として

$$\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| = \frac{\rho}{r} < 1$$

より

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left|\frac{f(\xi)}{\xi - a}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n\right| \leq \sum_{n=N}^{\infty}\frac{M}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n = \frac{M}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^N\frac{1}{1-\frac{\rho}{r}}$$
$$= \frac{M}{r-\rho}\left(\frac{\rho}{r}\right)^N \to 0 \qquad \text{as} \qquad N \to \infty \qquad (\text{independent of } {}^\forall\xi \in C)$$

そこで項分積分できて

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n d\xi = 0 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n \qquad \text{for} \qquad |z-a| < r_0 \end{aligned} \tag{1}$$

ここに

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}d\xi \tag{2}$$

∘ このベキ級数は、実は $|z-a| < r$ 内の任意の円で一様収束である

(証明) まず A_n で $\xi = a + re^{i\theta}$ として

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\frac{re^{i\theta}}{(re^{i\theta})^{n+1}}id\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{r}\right)^n\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}f(a + re^{i\theta})d\theta \end{aligned}$$

より A_n の estimate として

$$|A_n| \leq \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{r}\right)^n\int_0^{2\pi}|f(a + re^{i\theta})|d\theta \leq \frac{M}{r^n}$$

つまり

$$|A_n| \leq \frac{M}{r^n} \tag{3}$$

そこで $|z-a| \leq \rho$ なる任意の z に対して

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=N}^{\infty} |A_n(z-a)^n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{M}{r^n}\rho^n = M\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \\
&= M\left(\frac{\rho}{r}\right)^N \frac{1}{1-\frac{\rho}{r}} = \frac{Mr}{r-\rho}\left(\frac{\rho}{r}\right)^N \to 0 \qquad \text{as} \qquad N \to \infty \qquad (\text{independent of } z)
\end{aligned}$$

$\longrightarrow$ 絶対一様収束

○ (1) のベキ級数は項別微分可能で

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n(z-a)^{n-1} \qquad \text{for} \qquad |z-a| < r$$

ここで $z = a$ とおいて

$$f'(a) = f^{(1)}(a) = A_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^2}d\xi$$

更に、nA_n を係数とするベキ級数も一様収束するので、もう一度項別微分出来る。これをくり返して

$$f^{(n)}(a) = n!A_n$$

より

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi \tag{4}$$

(3) を使うと

$$|f^{(n)}(a)| \leq M\frac{n!}{r^n} \tag{5}$$

○ 領域 D の各点で正則 (領域 D で解析的) な函数は D 内の任意の点でベキ級数展開可能。その収束半径は解析性がそこなわれる点 (特異点、singularity) に達するまで拡げられる

○ $f(z)$ が解析的なら無限回微分可能で、それらの導函数はすべて解析的

[**Morera の定理**] (Cauchy の定理の逆)

$f(z)$: 連続とする。領域 D 内に (その内部まで含めて) 含まれる任意の単純な閉曲線 C に対して、常に

$$\int_C f(z)dz = 0$$

なら、$f(z)$ は D で解析的である

(証明) 微分形式 $\omega = f(z)dz$ を考えると

$$\int_C \omega = 0$$

より ω は D 内で閉じており (2.1.3 命題 4)、さらに、2.1.2 の命題 1 より ω は D 内で原始函数をもつ。つまり、z_0 と z を両端にもつ単純な曲線 γ に対して、ある連続的微分可能な函数 $F(z)$ が存在して

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \omega = \int_\gamma dF = F(z) - F(z_0)$$

$F'(z) = f(z)$ より $F(z)$ は D 内の任意の点で正則であり、$f(z)$ は解析函数の微分として解析的である

2.2.4　零点の考察、解析的延長

$f(z_0) = 0$ となる点を零点という。かつ $f'(z_0) \neq 0$ なら z_0 は単純な (1 次の) 零点

$$f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = f^{(2)}(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$$

かつ $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ なら n 次の零点と呼ぶ

○「解析函数の零点は孤立する」

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

と Taylor 展開すると

1) $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$　かつ　$a_n \neq 0$

2) $^\forall a_n = 0$

のどちらか

1) の場合

$$f(z) = (z - z_0)^n \left(a_n + a_{n+1}(z - z_0) + a_{n+2}(z - z_0)^2 + \cdots\right)$$

$a_n > 0$ or $a_n < 0$ だが $z \to z_0$ へ近づくと ( ) の 2 項目以下は 0 に近づく。この級数は再び絶対一様収束だから $z = z_0$ で連続で

$$^\forall\varepsilon > 0 \qquad ^\exists\delta > 0 \qquad \langle\langle \quad |a_{n+1}(z - z_0) + a_{n+2}(z - z_0)^2 + \cdots| < \varepsilon \quad \text{for} \quad |z - z_0| < \delta \quad \rangle\rangle$$

そこで $\varepsilon < (1/2)|a_n|$ ととると

$$|a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \cdots| \geq |a_n| - |a_{n+1}(z - z_0) + \cdots| > 2\varepsilon - \varepsilon > \varepsilon$$

そこで $|z - z_0| < \delta$ なら $^\forall z \neq z_0$ に対して $|f(z)| \neq 0$。つまり、z_0 に或る近傍があって、そこでは $z \neq z_0$ なら $|f(z)| \neq 0 \longrightarrow$ 零点が孤立する (集積しない)

2) の場合：$a_n = (1/n!)f^{(n)}(z_0)$ より

$$f^{(0)}(z_0) = f^{(1)}(z_0) = f^{(2)}(z_0) = \cdots = 0$$

つまり、或る近傍 $V_\varepsilon(z_0)$ があって $^\forall z \in V_\varepsilon(z_0)$ に対して $f(z) = 0$。さらに、z のまわりの小さな円 γ に対して Cauchy の積分公式を適用すると

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi = 0$$

つまり、その近傍内では、実は

$$f(z) = f^{(1)}(z) = f^{(2)}(z) = \cdots = 0 \qquad \text{for} \qquad ^\forall z \in V_\varepsilon(z_0)$$

実は、領域 D 全体で $f(z) = 0$

(証明)

$$D' = \left\{ z \in D; f(z) = f^{(1)}(z) = \cdots = 0 \right\} \subset D$$

を考えると、$D' \neq \phi$ で開かつ閉。
開集合である事：$z_0 \in D'$ なら z_0 のまわりでベキ展開して、2) の場合で z_0 の或る近傍が D' に含まれる
閉集合である事：$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \cdots \to z$ (D' 内の集積点) とする。$^\forall n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して

$$f^{(n)}(z_1) = f^{(n)}(z_2) = f^{(n)}(z_3) = \cdots = 0$$

だが、$f^{(n)}(z)$ の連続性より $f^{(n)}(z) = 0$。つまり $z \in D'$。そこで $D'^c = D - D'(\text{closed}) = \text{open}$ とすると

$$D = D' \cup D'^c\ , \qquad D' \cap D'^c = \phi$$

D は連結していると仮定したから $D' = \phi$ or $D'^c = \phi$。ところで $D' \neq \phi$ より $D'^c = \phi$ つまり $D' = D$

つまり
「領域 D で $f(z)$ が解析的、かつ或る近傍で $f(z) = 0 \longrightarrow$ 実は D 全体で $f(z) = 0$」

ここから
「領域 D で $f(z)$ と $g(z)$ が解析的で、かつ或る近傍で $f(z) = g(z)$
$\Longrightarrow$ 実は D 全体で $f(z) = g(z)$」　　(一致の定理)

(注意)　実は $D' = \{z \in D; f(z) = 0\}$ が線分、あるいは集積する点列だけを含んでもよい。実際、$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \cdots (\in D') \rightarrow z_0$ (集積点) とすると $f(z)$: 連続より $f(z_0) = 0 \rightarrow z_0 \in D'$。そこで z_0 で零点が孤立しない。つまり、2) の場合である。そこで z_0 の或る近傍があって $V_\varepsilon(z_0) \subset D'$。あとは上の議論のくり返し

○ 領域 D で $f(z)$ と $g(z)$ が解析的とする。$h(z) = f(z)/g(z)$ を**有理型函数**という。$g(z)$ の零点が孤立しているから $f(z)$ の極 (pole: あとで定義する) も孤立する。つまり有界領域には $h(z)$ の極は有限個しかない (実は逆も真である)

○ ベキ級数の解析性: 「ベキ級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{1}$$

は収束半径 ρ 内の領域で、解析函数 $u_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ の絶対一様収束級数として解析的である。また z_0 のまわりのベキ級数展開は一意的である

(証明) まず $|z - z_0| < \rho$ 内の単連結領域でベキ級数 (1) は解析的だから、原始函数を持つ (2.2.2 の定理 4)。それを $F(z)$ とすると $F'(z) = f(z)$。この様な原始函数 $F(z)$ は定数を除いて一意的に決まる。ベキ級数展開の一意性は

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{n!} F^{(n+1)}(z_0) \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

からの直接的帰結である

[いくつかの簡単な応用]

○ Cauchy の積分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - a} dz$$

で C として a を中心とする半径 ρ の円をとると

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta \qquad \text{(平均値の性質)} \tag{1}$$

$\longrightarrow$ 調和函数 ($\Delta f = 0$) を特徴づける

○ 最大値の原理、最小値の原理: 「 $f(z)$ を領域 D で解析的とする。D 内の任意の有界閉域 $[K]$ において、$|f(z)|$ はその最大値を $[K]$ の境界上においてとる。また $[K]$ において $f(z) \neq 0$ なら $|f(z)|$ はその最小値を境界上においてとる」

(証明)　$|f(z)|$ は $[K]$ で最大値をもつから、その値を M とする。もし $[K]$ の内点 a で $|f(a)| = M$ なら a を中心として $[K]$ に含まれる任意の円 C に対して (1) が成りたつ。つまり

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(a + \rho e^{i\theta}\right) \right| \, d\theta \leq M$$

ここで等号が成りたつためには

$$\left| f\left(a + \rho e^{i\theta}\right) \right| = M \qquad \text{for} \qquad {}^\forall \theta$$

つまり C 上で常に $|f(z)| = M$.　C は任意より a の近傍で常に $|f(z)| = M$

$$\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z)$$

より、実部が定数なら虚部も定数で $\log f(z)$ つまり $f(z)$ が定数。そこで、実は $[K]$ 全体で $f(z) = \text{const.}$　従って $f(z) = \text{const.}$ の場合のほかは $[K]$ の内部においては $|f(z)| < M$ で $|f(z)| = M$ なる点は $[K]$ の境界上にある。もし $[K]$ において $f(z) \neq 0$ なら、$1/f(z)$ は $[K]$ において正則だから $|f(z)|$ は境界上で最小値をとる

○ 「代数学の基本定理」　n 次の多項式 $(n \geq 1)$

$$f(z) = a_0 + a_a z + \cdots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0)$$

は 1 個以上の根を持つ

(証明) もし根がないとすると $f(0) = a_0 \neq 0$。$|z| = R$ を十分大きくとれば、$a_n \neq 0$ より $|f(z)| > |a_0|$。$|f(z)|$ は閉域 $|z| \leq R$ の境界 $|z| = R$ の上で最小値をとるから、これは矛盾！

2.3　解析函数の特異点と留数

解析函数の正則性が崩れる点を「特異点」という。例えば
$f(z)$: 領域 D で解析的とする。D 内に含まれる任意の円板内 C で Taylor 展開可能

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

z_0 を k 次の零点とすると

$$f(z) = a_k(z-z_0)^k + a_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \cdots \qquad (a_k \neq 0)$$

零点は孤立するから $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ は $z = z_0$ の或る近傍で解析的。$z = z_0$ では発散。しかし

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^k \varphi(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{a_k + a_{k+1}(z-z_0) + \cdots} = \frac{1}{a_k}$$

この様な特異点 z_0 を極 (pole) という。当然、解析函数の極は孤立する

2.3.1 Laurent 展開

C, C' を中心 a を持つ同心円 ($C' \subset C$) として、C と C' で囲まれる円環内に点 $a+k$ をとる。$f(z)$ はこの円環内、及び C と C' 上で解析的とする。Cauchy の積分公式から $a+k$ を囲む円環内の任意の contour γ に対して

$$f(a+k) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a-k} dz$$

γ を円環内で連続的に変形していくと、L_1, L_2 の寄与は互いに打ち消しあうから

$$f(a+k) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a-k} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(z)}{z-a-k} dz$$

C 上では

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-a-k} &= \frac{1}{(z-a)\left(1-\frac{k}{z-a}\right)} \\
&= \frac{1}{z-a}\left\{1 + \frac{k}{z-a} + \left(\frac{k}{z-a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{k}{z-a}\right)^n + \frac{1}{1-\frac{k}{z-a}}\left(\frac{k}{z-a}\right)^{n+1}\right\}
\end{aligned}$$

C' 上では

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-a-k} &= -\frac{1}{k-(z-a)} = -\frac{1}{k\left(1-\frac{z-a}{k}\right)} \\
&= -\frac{1}{k}\left\{1 + \frac{z-a}{k} + \left(\frac{z-a}{k}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z-a}{k}\right)^n + \frac{1}{1-\frac{z-a}{k}}\left(\frac{z-a}{k}\right)^{n+1}\right\}
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
f(a+k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \left\{\frac{1}{z-a} + \frac{k}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{k^n}{(z-a)^{n+1}} + \frac{k^{n+1}}{(z-a-k)(z-a)^{n+1}}\right\} dz \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} f(z) \left\{\frac{1}{k} + \frac{(z-a)}{k^2} + \cdots + \frac{(z-a)^n}{k^{n+1}} - \frac{(z-a)^{n+1}}{(z-a-k)k^{n+1}}\right\} dz
\end{aligned}$$

ここに C の半径を r、C' の半径を r' として

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{k^{n+1}}{(z-a-k)(z-a)^{n+1}}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{|k|^{n+1}}{|z-a-k||z-a|^{n+1}}|dz| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{|k|^{n+1}}{(|z-a|-|k|)|z-a|^n}\left|\frac{dz}{z-a}\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|k|^{n+1}}{r-|k|}\frac{1}{r^n}d\,\theta = \frac{|k|}{r-|k|}\left(\frac{|k|}{r}\right)^n \to 0 \qquad \text{as} \qquad n\to\infty\ , \\
&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{(z-a)^{n+1}}{(z-a-k)k^{n+1}}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{C'} \frac{1}{|k|-|z-a|}\frac{|z-a|^{n+2}}{|k|^{n+1}}\left|\frac{dz}{z-a}\right| \\
&= \frac{1}{(|k|-r')}\frac{(r')^{n+2}}{|k|^{n+1}} = \frac{r'}{|k|-r'}\left(\frac{r'}{|k|}\right)^{n+1} \to 0 \qquad \text{as} \qquad n\to\infty
\end{aligned}
$$

より

$$
f(a+k) = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \cdots + \frac{b_1}{k} + \frac{b_2}{k^2} + \cdots
$$

ここに

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \qquad\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \\
b_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} (z-a)^{n-1}f(z)dz \qquad n=1,\ 2,\ \cdots
\end{aligned}
$$

かつ

$$
|a_n| \le \frac{1}{r^n}\sup_{z\in C}|f(z)| \qquad\qquad |b_n| \le (r')^n \sup_{z\in C'}|f(z)|
$$

この無限級数は $r' < |k| < r$ で絶対一様収束である。結局、まとめると

「 a を中心とする同心円 $(C' \subset C)$ 上、及びその円環の内部で $f(z)$ が解析的なら円環内の任意の点 z で Laurent 展開できる 」

$$
f(z) = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots
$$

ここに

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\,\xi \qquad \text{for} \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ ,\cdots \\
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} (\xi-a)^{-n-1}f(\xi)\ d\,\xi \qquad \text{for} \qquad n=-1,\ -2,\ ,\cdots
\end{aligned}
$$

特に

$$
a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} f(\xi)d\xi
$$

を $f(z)$ の $z=a$ における留数という

また、特に $C' \to a$ に縮小出来るとき、$f(z)$ は 1 点 a を除く C 内のすべての点で Laurent 展開可能

(注意)　$f(z)$ は孤立特異点 a では定義されていないが、その Laurent 展開の係数が $a_{-1}=a_{-2}=\cdots=0$ の時、$f(a)=a_0$ とおくことにより $f(z)$ を $z=a$ を含めて解析的な函数に拡張できる。この場合、$z=a$ を「除きうる特異点」という。$f(z)$ は元来 $z=a$ を含めて解析的である

(例)

$$
\begin{aligned}
f(z) = \frac{\sin z}{z} \qquad &\to \qquad f(0)=1 \\
F(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \qquad &\to \qquad F(a)=f'(a) \qquad etc.
\end{aligned}
$$

(例) Bessel 函数の母函数

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} &= \cdots + z^n J_n(x) + \cdots + zJ_1(x) + J_0 \\
&\quad -\frac{1}{z}J_1(x) + \frac{1}{z^2}J_2(x) - \cdots + (-1)^n \frac{1}{z^n}J_n(x) + \cdots
\end{aligned}
$$

ここに

$$
J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\, d\,\theta
$$

(証明)　$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ は $z=0$ 以外のすべての点で正則

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\,\frac{d\,z}{z^{n+1}} \qquad \text{for} \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ ,\cdots \\
a_{-n} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} z^{n-1}\, d\,z \qquad \text{for} \qquad n=1,\ 2,\ ,\cdots
\end{aligned}
$$

C、C' を単位円に変形して $z=e^{i\theta},\ dz/z = id\theta$ より

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\frac{x}{2}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)} e^{-in\theta}\, d\,\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(x\sin\theta - n\theta)}\, d\,\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\cos(n\theta - x\sin\theta)\, d\,\theta - i\int_0^{2\pi}\sin(n\theta - x\sin\theta)\, d\,\theta\right)
\end{aligned}
$$

$\sin(n\theta - x\sin\theta)$ は θ の奇函数、かつ 2π の周期函数より

$$
\int_0^{2\pi}\sin(n\theta - x\sin\theta)\, d\,\theta = 0
$$

そこで

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\, d\,\theta = J_n(x) \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

を n 次の Bessel 函数という。一方 a_{-n} は展開式で $z \to -1/z$ としても不変だから

$$a_{-n} = (-1)^n a_n = (-1)^n J_n(x) \qquad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

[**極の定義**]

$f(z)$: ある閉領域 $[K]$ で $a \in K$ を除いて解析的する。次の様な $\phi(z)$ があるとする

1) $\phi(z)$ は $[K]$ 全体で解析的

2) $z \neq a$ なら

$$f(z) = \phi(z) + \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{B_n}{(z-a)^n}$$

この時 $f(z)$ は $z = a$ で n 次の極をもつといい、$\frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{B_n}{(z-a)^n}$ を a の近傍での $f(z)$ の主要部 (principal part) という。1 価函数の極以外の特異点を真性特異点 (essential singularity) という (勿論「除きうる特異点」は別)

○ 真性特異点が孤立しておれば、その周りで Laurent 展開可能。その時、主要部は無限級数

○ 極は孤立した特異点 (isolated singularity) である (定義から明らか)
“孤立しない特異点”(例えば、極の集積点) は真性特点である (この場合は Laurent 展開できない)

[**孤立した特異点の性質**]

「孤立した真性特異点のまわりでは $f(z)$ は有界でない」

(証明)　z_0 を孤立した真性特異点とすると、そのまわりに Laurent 展開可能。それを

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

とする。ここに $a_{-1},\ a_{-2},\ \cdots \neq 0$ (無限個)
この時 $|f(z_n)| \to \infty$ なる点列 $z_n \to z_0$ が存在する事を示す。いまこれを否定して、$^\exists r,\ M\ (>0)$ として $0 < |z-z_0| < r$ のとき $z \neq z_0$ に対して $|f(z)| < M$ と仮定する。
z_0 のまわりの小さな円 c に対して

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c (z-z_0)^{n-1} f(z)\, d\,z \qquad (n = 1,\ 2,\ ,\cdots)$$

c の半径を ρ として $\rho < r$ とすると

$$|a_{-n}| \leq \frac{1}{2\pi}\int_c |z-z_0|^n M \left|\frac{d\,z}{z-z_0}\right| = \rho^n M$$

ここで $\rho \to 0$ とできるから $a_{-n} = 0$ for $n = 1,\ 2,\ ,\cdots \longrightarrow$ 矛盾！ (実は極でも発散)

(注意)　ここから、2.3 のはじめにあげた例が極の定義を満たすことがわかる。実際

$$f(z) = a_k(z-z_0)^k + a_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \cdots \qquad (a_k \neq 0)$$

として、z_0 は $\varphi(z) = 1/f(z)$ の孤立特異点より

$$\varphi(z) = \cdots + a_{-1}\frac{1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

と Laurent 展開できて、$z = z_0$ を除いて z_0 のまわりで解析的

$$g(z) = (z-z_0)^k\varphi(z)$$

をつくると、$g(z)$ も z_0 のまわりで解析的、かつ

$$\lim_{z\to z_0} g(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k\varphi(z) = \frac{1}{a_k}$$

で有界。従って $z = z_0$ は $g(z)$ の真性特異点ではありえない (実は $z = z_0$ でも解析的)
従って、$\varphi(z)$ も負のベキは有限個。z_0 は $\varphi(z)$ の極

$f(z)$:　零点　$\Longleftrightarrow$　$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$:　極

[**Weierstrass の定理**]

「解析函数 $f(z)$ は孤立した真性特異点 $z = a$ にどれほど近いところでも、任意の値 c に限りなく近づく」

(証明)　$f(z_n) \to c$ なる点列 $z_n \to a$ が存在することを示す。つまり

$^\forall\varepsilon > 0 \quad ^\forall r > 0$ に対して
$0 < |z-a| < r$　　かつ　　$|f(z)-c| < \varepsilon$

なる点 z が存在することを示す。いま、これを否定して

$^\exists\varepsilon > 0 \quad ^\exists r > 0$
$0 < |z-a| < r$　　のとき常に　　$|f(z)-c| > \varepsilon$

とする

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - c}$$

とおくと、$0 < |z-a| < r$ で常に $|\varphi(z)| < 1/\varepsilon$. a は孤立しているから、$\varphi(z)$ は $z=a$ を除いて解析的。そこで $z=a$ は $\varphi(z)$ の極でも、真性特異点でもない (これらの場合 $\varphi(z)$ は $z=a$ のまわりで有界でない). つまり、除きうる特異点である。そこで、$\varphi(a) = \lambda$ とすると $\varphi(z)$ は a の近傍で解析的となる。$\lambda \neq 0$ なら、$\lambda = 1/(f(a)-c)$ より $f(a) = c + 1/\lambda$ と $f(a)$ の値を定義すると、$f(z)$ は $z=a$ で正則 $\longrightarrow$ 矛盾！ $\lambda = 0$ なら、$z=a$ は $\varphi(z)$ の零点で $f(z) = 1/\varphi(z) + c$ の極である (前の注意) $\longrightarrow$ 矛盾！

(真性特異点の例)

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots$$

$z=0$ は孤立した真性特異点。実際

$$\lim_{x\to+0} e^{\frac{1}{z}} = \infty \qquad\qquad \lim_{x\to-0} e^{\frac{1}{z}} = 0$$

$c \neq 0$ のとき $e^{\frac{1}{z}} = c$ とすると

$$z = \frac{1}{\log c} = \frac{1}{\alpha + 2\pi i n} \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ ,\cdots)$$

ここに $\alpha = \mathrm{Log}\, c = \mathrm{Log}\,|c| + i\,\mathrm{Arg}\, c$, (主値). $n \to \infty$ のとき 0 に集積する (実際は a の近傍において $f(z) = c$ は一般に無数の根を有する。ただし c のただ一つの値だけが例外である事もある。上の例では、$c=0$ の値はダメ: Picard の例外点)

2.3.2 無限遠点における解析函数

「$z = 1/z'$ により $z' = 0$ における解析性に転換する」

$f(z)$: 半径 R の円の外で解析的とすると $|z| > R$ の任意の点で Laurent 展開可能

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \qquad &&\text{for} \quad |z| > R \\ a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \qquad &&\text{for} \quad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots \end{aligned}$$

ここに C は R より大なる任意の円周

$$f(z) = \underbrace{\cdots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z}}_{\hookrightarrow 0 \quad \text{as} \quad z\to\infty} + a_0 + \underbrace{a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots}_{\text{主要部}}$$

1) 主要部なし

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \cdots = P\left(\frac{1}{z}\right) \quad (1/z \text{ のベキ級数})$$

$z \to \infty$ で $f(z) \to a_0$： $z = \infty$ で正則という

2) 主要部は有限級数

$$f(z) = a_k z^k + \cdots + a_1 z + P\left(\frac{1}{z}\right) \qquad (a_k \neq 0)$$

$z \to \infty$ のとき $|f(z)| \to \infty$
$f(z)/z^k$ は $z = \infty$ で正則： $z = \infty$ は $f(z)$ の k 次の極 (pole)

3) 主要部は無限級数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

で $a_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ なる係数が無数にある： $z = \infty$ は $f(z)$ の真性特異点
$z_n \to \infty$ のとき、点列を適当にとれば任意の値に無限に近づく

2.4 整函数、形式的ベキ級数論との関係

整函数 (integral function, entire function): 全複素平面 ($z = \infty$ は含まない) で解析的な函数 (or $z = \infty$ を除いて解析的)。この場合 $z = 0$ における Taylor 展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

が、すべての $z \in \boldsymbol{C}$ に関して収束する (収束半径 $\rho = \infty$)

次の三つの場合がある

1) $f(z) = \text{const.}$

2) $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0,\ n \geq 1)$ 　　多項式

$$\lim_{z \to \infty} |f(z)| = \infty \qquad (\text{普通} \quad \lim_{z \to \infty} f(z) = \infty \quad \text{と書く})$$

3) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 　　無限級数、収束半径 ∞、今度は $\lim_{z \to \infty} f(z)$ は不確定
この場合は特に超越整函数という (e^z, $\sin z$, e^{e^z} 等)

[Liouville 定理]

「 整函数 $f(z)$ が有界 ($|f(z)| < M$ for $^\forall z \in \boldsymbol{C}$) なら $f(z) = \text{const.}$ 」

(証明) 上の 2)、3) ではあり得ない。さらに

「 $z = \infty$ を含めて $f(z)$ が全複素平面で正則なら $f(z) = \text{const.}$ 」

○ (代数学の基本定理) 「一次以上の多項式 $f(z)$ は根を有する」

(証明) もし根がなければ $1/f(z)$ は整函数。しかるに $z \to \infty$ のとき $f(z) \to \infty$ より $1/f(z) \to 0$ (有界)。Liouville 定理より $1/f(z) = \text{const.} \to f(z) = \text{const.}$ 矛盾！

○ (有理函数) 「 無限遠点を含めて極しかもたない一価の解析函数は有理函数 (=多項式/多項式) 」

(証明) 解析函数の極は孤立しているから、有界領域には有限個の極しかない (無限個あれば集積する) また、無限遠点も高々極しかもたないから (極の集積点は真性特異点) これらの極は全平面で有限個である。それを c_1, c_2, $\cdots$, c_k とする。極の定義より、ある解析函数 $\phi(z)$ があって

$$f(z) = \phi(z) + \sum_{r=1}^{k} \left\{ \frac{a_{r,1}}{z - c_r} + \frac{a_{r,2}}{(z - c_r)^2} + \cdots + \frac{a_{r,n_r}}{(z - c_r)^{n_r}} \right\}$$

無限遠点は高々極だから、その主要部は $a_1 z + \cdots + a_n z^n$。そこで

$$\begin{aligned} F(z) &= f(z) - \sum_{r=1}^{k} \left\{ \frac{a_{r,1}}{z - c_r} + \cdots + \frac{a_{r,n_r}}{(z - c_r)^{n_r}} \right\} \\ &\quad - a_1 z - \cdots - a_n z^n \end{aligned}$$

は $z = \infty$ を含めて全複素平面で解析的。そこで Liouville 定理 (の系) より $F(z) = C$ ($= \text{const.}$) つまり

$$\begin{aligned} f(z) &= C + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \sum_{r=1}^{k} \left\{ \frac{a_{r,1}}{z - c_r} + \cdots + \frac{a_{r,n_r}}{(z - c_r)^{n_r}} \right\} \\ &= \frac{\text{多項式}}{\text{多項式}} = \text{有理函数} \end{aligned}$$

(注意)　無限遠点を除いて、全複素平面で極しかもたなければ

$$\frac{\text{整函数}}{\text{整函数}} = \text{有理型函数}$$

[形式的ベキ級数論との関係]

H. Cartan の「複素函数論」では、まず「形式的ベキ級数」

$$S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \qquad a_n \in \boldsymbol{C}$$

を定義して、それが有限の収束半径 $0 < \rho < \infty$ をもつとき、「収束ベキ級数」として解析函数を定義している

○「形式的ベキ級数」全体の集合は、体 $\boldsymbol{C}$ 上の多元環 (algebra) の構造をもつ

○ それに 、「位数」の概念を導入することにより、形式的ベキ級数の無限和が正確に定義できる

○ 合成函数、微分、逆函数等も正確に定義できる

「物理数学 (前期) 講義」　　おわり　　H12. 6. 24 by Y.F.