2.5 有理型函数

2.5.1 定義と性質

領域 D で定義された 1 価解析函数 $f(z)$ が極以外の特異点を持たない時、有理型 (meromorphic) という。この時、

「D 内の有界閉域において $f(z)$ の極の数は有限個、また $f(z)$ の零点等 $f(z)$ が一定の値をとる点も同様」

(証明)

有界閉域内に極が無限個あればどこかに集積する。(Bolzano-Weierstrass の定理) この集積点は真性特異点であり、それが有界閉域内にある事になって矛盾。また、零点についても、解析函数の零点は必ず孤立するから同様のことが言える。$f(z) = c$ の場合は $f(z) - c$ の零点を考えればよい。

○ 領域 D における正則函数の商 $\frac{f(z)}{g(z)}$ は ($g(z) = 0$ の時以外) 有理型である。」

○ $z = a$ が $f(z)$ の k 次の零点なら $f(z) = (z-a)^k \phi(z)$ と書いて $z = a$ の近傍で $\phi(z)$ は解析的、かつ $\phi(a) \neq 0$

$$f'(z) = k(z-a)^{k-1}\phi(z) + (z-a)^k \phi'(z)$$

より

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-a} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$$

$\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$ は $z = a$ で解析的より $z = a$ のまわりの小さな円 c で囲むと

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz = k\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z-a} + \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}dz = k$$

同様に h 次の極なら

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^h}\phi(z) = (z-a)^{-h}\phi(z)$$
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{h}{z-a} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$$

より、同様にして

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -h$$

○ 単連結領域 D において $f(z)$ が有理型で C は D 内で $f(z)$ の零点および極を通らない閉曲線とする。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \#\text{ of zeros} - \#\text{ of poles}$$

ここに、k 次の zero は k 個、h 次の pole は h 個と考える。

(証明)

C 内には零点と極は有限個しかないから、図 (省略) の様に C を変形すると、零点のまわりの小さな円を γ_i $(i = 1 \sim n)$、極のまわりの小さな円を γ'_j $(j = 1 \sim m)$ として

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_i}\frac{f'(z)}{f(z)}dz + \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'_j}\frac{f'(z)}{f(z)}dz \\ &= \sum_{i=1}^{n}k_i - \sum_{j=1}^{m}h'_j\end{aligned}$$

ここに、k_i、h'_j はそれぞれ、零点 $z = a_i$ と極 $z = b'_j$ の次数である。

○ 特に $f(z)$ が有理式の時、零点と極の数は有限個で

$$f'(z) = \frac{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)}{(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_m)}$$

として

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz}\log f(z) = \frac{d}{dz}\left\{\sum_{p=1}^{n}\log(z-a_p) - \sum_{q=1}^{m}\log(z-b_q)\right\}$$

$$= \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{z-a_p} - \sum_{q=1}^{m}\frac{1}{z-b_q}$$

そこで、半径 R の十分大きな円 C をとると

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = n - m$$

これは、点 a_p、b_q の十分小さい近傍で c_p、c'_q で

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{c_p}\frac{f'(z)}{f(z)}dz + \sum_{q=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{c'_q}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{p=1}^{n}\log(z-a_p)\big|_{c_p} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{q=1}^{m}\log(z-b_q)\big|_{c'_q} = \sum_{i=1}^{n}1 - \sum_{j=1}^{m}1 = n - m$$

とすれば、その意味が良くわかる。

「k 次の零点 or 極は 1 次の零点 or 極が k 個寄り集まった (合流) した点である。」

次に、前の定理の逆を示す。正確に述べると

「(無限遠点を除いて) 全複素平面で有理型な函数を有理型函数と呼ぶ。有理型函数は二つの整函数の商として表される。」

(注意) 有理型函数は有理函数と同様、体 (algebra) をつくる。つまり有理型函数の和、差、積、商はすべて有理型函数である。

これを示すために、まず無限乗積の簡単な事実を復習する。

2.5.2 無限乗積

「$p_1p_2\cdots p_n\cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} P_n = P$ (ここに $P_n = p_1p_2\cdots p_n$) が存在し、極限が 0 でない時 $p_1p_2\cdots$ は P に収束するという。」
($p_1p_2\cdots$ に高々有限個の 0 があっても良い。その時はそれを除いて無限積を考察する。)

この時

$$p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \to 1 \qquad \text{for} \qquad n\to\infty$$

より、$p_1p_2\cdots$ のかわりに

$$P = \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \qquad a_n \to 0 \quad \text{for} \quad n\to\infty$$

を考える。有限積で log をとって

$$\log P_N = \log\prod_{n=1}^{N}(1+a_n) = \sum_{n=1}^{N}\log(1+a_n) = S_N$$

より

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n) = \lim_{N\to\infty} S_N$$

が収束すれば

$$P = \lim_{N\to\infty} P_N = \lim_{N\to\infty} e^{S_N} = e^{\lim S_N} = e^S \qquad (e^z \text{ の連続性})$$

従って

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \quad \text{の収束性} \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n) \quad \text{の収束性}$$

(下の注意参照)
さらに

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n) \quad \text{の絶対収束性} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{の絶対収束性}$$

実際

$$\lim_{z\to 0}\frac{\log(1+z)}{z} = 1$$

より $a_n \to 0$ $(n\to\infty)$ の時

$$\begin{aligned} &{}^{\forall}\varepsilon > 0 \qquad {}^{\exists}N \\ &{}^{\forall}n > N \quad \text{に対して} \qquad (1-\varepsilon)|a_n| < |\log(1+a_n)| < (1+\varepsilon)|a_n| \end{aligned}$$

そこで

「$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ が絶対収束するための必要十分条件は $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が絶対収束すること」

(注意) $\forall\ \log(1+a_n)=\mathrm{Log}(1+a_n)$: 主値としても $\log P=\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$ は主値をとるとは限らないが、どこかの枝 (branch) に収束する。

実際、$P\neq 0$ として $\frac{P_n}{P}\to 1\ (n\to\infty)$ より $\mathrm{Log}\frac{P_n}{P}\to 0$。そこで

$$\mathrm{Log}\frac{P_n}{P}=S_n-\mathrm{Log}P+i2\pi h_n$$

なる整数 h_n が n ごとに存在する。n と $n+1$ の差をとって

$$\begin{aligned}&(h_{n+1}-h_n)2\pi i=\mathrm{Log}\frac{P_{n+1}}{P}-\mathrm{Log}\frac{P_n}{P}+S_n-S_{n+1}\\&=\mathrm{Log}\frac{P_{n+1}}{P}-\mathrm{Log}\frac{P_n}{P}-\mathrm{Log}(1+a_n)\end{aligned}$$

imaginary part をとって

$$\begin{aligned}&(h_{n+1}-h_n)2\pi=\mathrm{Arg}\frac{P_{n+1}}{P}-\mathrm{Arg}\frac{P_n}{P}-\mathrm{Arg}(1+a_n)\\&-\pi<\mathrm{Arg}(1+a_n)\leq\pi\end{aligned}$$

かつ $\mathrm{Arg}\frac{P_{n+1}}{P}-\mathrm{Arg}\frac{P_n}{P}\to 0$ for $n\to\infty$ より n を十分大きくとれば $h_{n+1}=h_n$。つまり

$$^{\exists}N\qquad h_{N+1}=h_{N+2}=\cdots=h$$

がひとつ決まる。そこで $n\to\infty$ として

$$\begin{aligned}&S-\mathrm{Log}P+i2\pi h=0\\&\mathrm{Log}P=S+i2\pi h\\&P=e^{S+i2\pi h}=e^S\end{aligned}$$

(例)

1.

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$ は収束する Riemann のゼータ函数から、無限積は収束。

$$\begin{aligned}&\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n}\frac{n+1}{n}\\&=\left(\frac{1}{2}\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\frac{5}{4}\right)\left(\frac{4}{5}\frac{6}{5}\right)\cdots=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

2.

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots = \frac{1}{1-z} \qquad \text{for} \qquad |z|<1$$

$|z|<\rho<1$ なる ρ を固定して

$$\begin{aligned}&|z|+|z|^2+|z|^4+\cdots \le \rho+\rho^2+\rho^4+\rho^8+\cdots \\ &\le \rho+\rho^2+\rho^3+\rho^4+\cdots = \frac{\rho}{1-\rho} < \infty\end{aligned}$$

より一様絶対収束。

$$\begin{aligned}&(1-z)(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots = (1-z^2)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots \\ &= (1-z^4)(1+z^4)(1+z^8)\cdots = (1-z^8)(1+z^8)\cdots \\ &= (1-z^{2^n})(1+z^{2^n})(1+z^{2^{n+1}})\cdots \to 1\end{aligned}$$

より O.K.

3.

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

は任意のコンパクト集合上で絶対一様収束。

$|z|<\rho$ とすると

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} = e^{-\frac{z}{n}+\log\left(1+\frac{z}{n}\right)}$$

従って $|z|<\rho$ とすると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}\right]$$

が $|z|<\rho$ で収束する事を示せばよい。$\log(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots$ より、剰余項は

$$\begin{aligned}R_N &= \sum_{n=N+1}^{\infty}\left|-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{n}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{z}{n}\right)^4+\cdots\right| \\ &\le \sum_{n=N+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\rho}{n}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{\rho}{n}\right)^4+\cdots\right\} \\ &\le \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{n}\right)^2\left[1+\frac{\rho}{n}+\left(\frac{\rho}{n}\right)^2+\cdots\right] = \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{n}\right)^2\frac{1}{1-\frac{\rho}{n}}\end{aligned}$$

$N>2\rho$ とすると、$n>N$ に対して $n>2\rho$。つまり $\frac{\rho}{n}<\frac{1}{2}$ より

$$R_N \le \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{n}\right)^2 \to 0 \qquad \text{as} \qquad N\to\infty$$

2.5.3 「有理型函数=整函数/整函数」の証明

∘「整函数 $f(z)$ が零点を持たなければ、ある整函数 $g(z)$ があって $f(z)=e^{g(z)}$ 」

(証明)
$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\text{整函数}}{\text{整函数}}$ で $f(z)$ は零点を持たないから、$\frac{f'(z)}{f(z)}$ は全平面で解析的、つまり整函数。そこで、整函数の原始函数 $g(z)$ が存在して

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

そこで

$$\left(f(z)e^{-g(z)}\right)' = f'(z)e^{-g(z)} - f(z)g'(z)e^{-g(z)} = \left(f'(z) - f(z)g'(z)\right)e^{-g(z)} = 0$$

$$f(z)e^{-g(z)} = \text{const} \quad (\neq 0) \qquad \rightarrow \qquad f(z) = \text{const}\ e^{g(z)} = e^{c+g(z)}$$

そこで $c+g(z)$ を新しく $g(z)$ とすればよい。

∘「整函数 $f(z)$ が $z=0, a_1, \cdots, a_N$ $(0<|a_1|\leq|a_2|\leq\cdots\leq|a_N|)$ にそれぞれ m (≥ 0), $m_1, m_2, \cdots m_N$ (≥ 1) 次の零点を持つとする。この時、ある整函数 $g(z)$ が存在して

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}$$

と表される。」

(証明)

$$f(z) = z^m \prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{m_n} \psi(z)$$

と書くと、$\psi(z)$ は零点を持たない整函数だから、ある整函数 $g(z)$ があって、$\psi(z)=e^{g(z)}$ と表される。

[零点が無限個ある場合]

一般には無限乗積 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{m_n}$ は必ずしも収束しない。しかし、この場合も各因子に適当な因子をかけて収束するように出来る。そこでは、整函数の零点の性質として、$|a_n|\to\infty$ $(n\to\infty)$ となることが本質的である。

∘「上と同じ条件のもとで $|a_n|\to\infty$ $(n\to\infty)$ とする。k_n を a_n と m_n から決まるある正の整数として

$$g_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k_n-1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n-1} \qquad (k_n \geq 2)$$

($k_n = 1$ なら $g_n(z) = 0$ とする) を用いて

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{g_n(z)} \right\}^{m_n}$$

が原点を中心とする任意の円内 $|z| < K$ で絶対一様収束する。」

(証明) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ より $|z| < K$ の時、$^\exists N \quad {}^\forall n > N$ の n に対して $|a_n| > 2K$

$$\left|\frac{z}{a_n}\right| < \frac{K}{|a_n|} < \frac{1}{2}$$

一方

$$\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = e^{\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)} = e^{-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{z}{a_n}\right)^m}$$

より

$$\left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{g_n(z)} \right\}^{m_n} = e^{u_n(z)}$$

として

$$F(z) = e^{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)}$$

ここに

$$\begin{aligned}
u_n(z) &= m_n \left\{ g_n(z) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{z}{a_n}\right)^m \right\} \\
&= -m_n \sum_{m=k_n}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{z}{a_n}\right)^m \\
|u_n(z)| &\leq m_n \sum_{m=k_n}^{\infty} \frac{1}{m} \left|\frac{z}{a_n}\right|^m \leq m_n \sum_{m=k_n}^{\infty} \frac{1}{m} \left|\frac{K}{a_n}\right|^m \\
&\leq m_n \frac{1}{k_n} \left(\frac{K}{|a_n|}\right)^{k_n} \left[1 + \frac{k_n}{k_n+1} \frac{K}{|a_n|} + \frac{k_n}{k_n+2} \left(\frac{K}{|a_n|}\right)^2 + \cdots \right]
\end{aligned}$$

ここに

$$[\cdots] \leq 1 + \frac{K}{|a_n|} + \left(\frac{K}{|a_n|}\right)^2 + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{K}{|a_n|}} < 2$$

$$|u_n(z)| \leq 2 \frac{m_n}{k_n} \left|\frac{K}{a_n}\right|^{k_n}$$

そこで

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n(z)| \leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{m_n}{k_n} \left|\frac{K}{a_n}\right|^{k_n} \to 0 \qquad (N \to \infty)$$

であれば $F(z)$ は絶対一様収束。

このような k_n が取れる事は証明が必要。

特に、${}^\forall m_n = 1$ なら $k_n = n$ ととれば

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{N+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^N} \to 0 \qquad (N \to \infty)$$

で O.K.

また、一般の場合にも

$$k_n > n + \frac{\log m_n}{\log 2}$$

ととればよい。実際、この時

$$\log m_n - k_n \log 2 < -n \log 2 \qquad \text{or} \qquad \log\left(m_n \left(\frac{1}{2}\right)^{k_n}\right) < \log\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\to \qquad m_n \left(\frac{1}{2}\right)^{k_n} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

より

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n \left(\frac{1}{2}\right)^{k_n} < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 \qquad \text{収束！}$$

○「$z = 0, a_1, a_2, \cdots$ $(0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots)$ でそれぞれ m (≥ 0), $m_1, m_2, \cdots$ (≥ 1) 次の零点を持ち、$|a_n| \to \infty$ $(n \to \infty)$ とする。これ以外で零点を持たない任意の整函数は

$$f(z) = z^m e^{g(z)} F(z)$$

と書ける。ここに $g(z)$ は整函数である。」

○「全平面での有理型函数は整函数の商として表される。」

(証明) $F(z)$ を $z = 0, a_1, a_2, \cdots$ $(0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots)$ でそれぞれ m (≥ 0), $m_1, m_2, \cdots$ (≥ 1) 次の極をもつ有理型函数とする。有理型函数の極は孤立するから $|a_n| \to \infty$ $(n \to \infty)$。$F(z)$ の極を零点にもつ整函数 $f(z)$ が上により作れるから $F(z)f(z)$ は全平面で解析的で整函数である。それを $g(z)$ とすると $F(z)f(z) = g(z)$。つまり、$F(z) = g(z)/f(z)$

2.5.4 いくつかの例

1. $f(z)=\sin\pi z$ の無限乗積展開

零点: $z=\pm n$, $a_n=\pm n$ かつ ${}^{\forall}m_n=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n}\left|\frac{K}{n}\right|^{k_n}<\infty$$

のためには $k_n=2$ ととればよい。

$$\sin\pi z = ze^{g(z)}\prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}$$

$g(z)$ を決めるために、両辺の対数微分をとると

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dz}\log\sin\pi z=\frac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}=\pi\mathrm{cot}\pi z\\
&\frac{d}{dz}\left\{\log z+g(z)+\sum_{n\neq 0}\left[\log\left(1-\frac{z}{n}\right)+\frac{z}{n}\right]\right\}\\
&=\frac{1}{z}+g'(z)+\sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

つまり

$$\pi\mathrm{cot}\pi z=\frac{1}{z}+g'(z)+\sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z}\right)$$

実は $g'(z)=0$ ($\pi\mathrm{cot}\pi z$ の部分分数展開) $\to g(z)=\mathrm{const}$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin\pi z}{z}=\pi=e^{g(0)}\to e^{g(z)}=\pi$$

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}$$

or

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\pi z}{\pi z} &= \prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}\\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}e^{-\frac{z}{n}}\\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

(問題) これを用いて、$\prod_{n=2}^{\infty}(1-1/n^2)=1/2$ を示せ。

2.　(Γ-函数)

$$G(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

を考える。$G(-z)$ の零点は $z=1,2,3,\cdots$

$$zG(z)G(-z)=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)=\frac{\sin\pi z}{\pi}$$

$G(z-1)$ の零点は $z-1=-1,-2,\cdots \quad \text{or} \quad z=0,-1,-2,\cdots$ より

$$G(z-1)=ze^{\gamma(z)}G(z) \qquad \gamma(z)=\text{整関数}$$

両辺の対数微分をとって

$$\frac{d}{dz}\log G(z)=\frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)$$

より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{z}+\gamma'(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)$$

左辺で $n\to n+1$ とかえて

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+n}-\frac{1}{n}\right)&=\frac{1}{z}-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{1}{z}-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

そこで $\gamma'(z)=0\to\gamma(z)=\text{const}=\gamma$ とおく。

$$G(z-1)=ze^{\gamma}G(z)$$

次に $H(z)=e^{\gamma z}G(z)$ とおくと

$$H(z-1)=e^{\gamma(z-1)}G(z-1)=ze^{\gamma z}G(z)=z\,H(z)$$

γ の値は $z=1$ として

$$1=G(0)=e^{\gamma}G(1)$$

$$G(1)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}}$$

より

$$e^{-\gamma} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}}$$

$$\begin{aligned}&\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}} = \prod_{n=1}^{N}\frac{n+1}{n}e^{-\frac{1}{n}}\\&= \frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{N+1}{N}e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}\right)} = (N+1)\ e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}\right)}\\&= e^{\log(N+1)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}\right)} = e^{-\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}-\log N\right\}+\log\left(1+\frac{1}{N}\right)}\end{aligned}$$

より $N \to \infty$ として

$$\gamma = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}-\log N\right) = 0.5772156\cdots \qquad \text{(Euler 定数)}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{zH(z)}$$

とすると

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} \qquad \text{(Weierstrass の公式)}$$

$$\Gamma(z+1) = \frac{1}{(z+1)H(z+1)} = \frac{1}{H(z)} = z\ \Gamma(z)$$

より

$$\Gamma(z+1) = z\ \Gamma(z)$$

$$zG(z)G(-z) = \frac{\sin\pi z}{\pi}$$

を $\Gamma(z)$ で書くと

$$\begin{aligned}&\Gamma(z)\Gamma(1-z) = (-z)\Gamma(z)\Gamma(-z) = (-z)\frac{1}{zH(z)(-z)H(-z)}\\&= \frac{1}{z}\frac{1}{e^{\gamma z}G(z)e^{-\gamma z}G(-z)} = \frac{1}{z}\frac{1}{G(z)G(-z)} = \frac{\pi}{\sin\pi z}\end{aligned}$$

つまり

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

まとめると

「$1/\Gamma(z)$ は全複素平面で解析的 (整函数) で、$z = 0,\ -1,\ -2, \cdots$ に 1 次の零点を持つ。また、$\Gamma(z)$ は有理型函数で、$z = 0,\ -1,\ -2, \cdots$ に 1 次の極を持ち、その留数は $(-1)^n(1/n!)$ (for $z = -n$)」

$$\Gamma(1) = e^{-\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} e^{\frac{1}{n}} = 1$$
$$\Gamma(n+1) = n\ \Gamma(n) = n(n-1)\ \Gamma(n-1) = \cdots = n\,!\ \Gamma(1) = n\,!$$

また、上で $z = 1/2$ として

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi$$

で $x \in \mathbf{R}$ のとき $\Gamma(x) > 0$ for $x > 0$ より

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

留数は

$$\begin{aligned}
&\lim_{z \to -n}(z+n)\Gamma(z) = \lim_{z \to -n}(z+n)\frac{1}{\Gamma(1-z)}\frac{\pi}{\sin \pi z} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \frac{1}{\Gamma(1+n-\varepsilon)} \frac{\pi}{\sin(-n\pi + \varepsilon\pi)} = \frac{\pi}{\Gamma(1+n)}(-1)^n \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon\pi} \\
&= (-1)^n \frac{1}{n\,!}
\end{aligned}$$

[ポリ Γ-函数]

$$\log \Gamma(z) = -\gamma z - \log z - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n}\right]$$

を微分して

$$\begin{aligned}
\psi(z) \quad &\equiv \quad \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{d}{dz}\log\Gamma(z) = -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) \\
&= \quad -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \quad -\gamma - \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{z} - 1 + 1 \\
&= \quad -\gamma - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

もう一度微分すると

$$\psi'(z) = \frac{d}{dz}\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}\right)^2$$

○ $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$ を微分して

$$\Gamma'(z+1) = z\,\Gamma'(z) + \Gamma(z)$$

比をとって

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} + \frac{1}{z}$$

そこで

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}$$

○ $\psi'(z)$ の表式から Legendre の 2 倍公式

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$$

も得られる。(アールフォース p.215 参照)

2.6 解析接続

2.6.1 解析接続の原理

(復習)

「領域 D で解析的な函数 $f(z)$ と $z_0 \in D$ に対して、次の条件は互いに同値である。

a) 全ての整数 $n \geq 0$ に対して $f^{(n)}(z_0) = 0$

b) $f(z)$ は z_0 のある近傍で恒等的に 0

c) $f(z)$ は D 内で恒等的に 0 」

(証明) 解析函数 $f(z)$ は z_0 のある近傍で冪級数に展開できる事と、領域 D が連結開集合である事に基づいている。

○ $z = z_0$ で解析的な函数は、その点 (P とする) を中心とする収束半径内で $(z - z_0)$ の冪級数に展開できる。収束半径は $f(z)$ の最も近い特異点 (A とする) までとれる。収束半径内の円で PA 上にない点 P_1 ($z = z_1$) をとれば新しい冪級数が定義でき、それ

は共通領域内で同じ函数を表す。新しい円板の収束半径は P_1 に最も近い (新しい冪級数で定義された) 解析函数の特異点まで広げることが出来る。(A のこともある。) この新しい収束円は、古い収束円からはみだした部分をもつことがある。その新しい領域における函数の値を新しい冪級数でもって定義する。この時、もとの函数 $f(z)$ は新しい領域に解析接続されたという。この操作を繰り返して、一連の一価解析函数の表式を求めることが出来る。

(例) $z \neq a$ で解析的な函数 $f(z) = \frac{1}{a-z}$ のそれぞれ異なった領域 $|z| < a$, $|z-b| < |a-b|$ における表現 ($|a| > |b|$ とする)

$$f(z) = \frac{1}{a-z} = \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} + \cdots \qquad \text{for} \qquad |z| < a$$

別の領域では

$$\frac{1}{a-z} = \frac{1}{(a-b)-(z-b)} = \frac{1}{a-b} + \frac{z-b}{(a-b)^2} + \frac{(z-b)^2}{(a-b)^3} + \cdots \quad \text{for} \quad |z-b| < |a-b|$$

$\frac{b}{a}$ が real で $\frac{b}{a} > 0$ の時以外、もとの収束円以外の部分がある。実際 $|a| > |b|$ より $\frac{b}{a} = re^{i\theta}$ とすると $r < 1$。$|z-b| = |a-b|$ の上では

$$z = b + |a-b|e^{i\phi} = are^{i\theta} + |a||1-re^{i\theta}|e^{i\phi}$$

より $|z| = |are^{i(\theta-\phi)} + |a||1-re^{i\theta}||$
$ae^{i(\theta-\phi)} = |a|$ と ϕ を選べば最大。この時、$|z| = |a||r + |1-re^{i\theta}||$
$r + |1-re^{i\theta}| > 1$ のためには $|1-re^{i\theta}| > 1-r \rightarrow \theta = 0$ 以外の時 O.K. つまり、$\frac{b}{a} = r > 0$ でなければよい。

○ この様な解析接続が出来ない場合もある。

$$f(z) = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + \cdots + z^{2^n} + \cdots \qquad \text{with} \qquad |z| < 1$$

$|z| < \rho < 1$ に対して $2^n > n$ for $n = 0,\ 1,\ 2, \cdots$ より $|z^{2^n}| \leq \rho^{2^n} \leq \rho^n$、かつ $\sum_{n=N+1}^{\infty} \rho^n \rightarrow 0$ for $N \rightarrow \infty$ より絶対一様収束。
$z \rightarrow 1-0$ の時 $f(z) \rightarrow \infty$
$f(z) = z^2 + f(z^2)$ より $z^2 \rightarrow 1-0$ の時 $f(z) \rightarrow \infty$
$f(z) = z^2 + z^4 + f(z^4)$ より $z^4 \rightarrow 1-0$ の時 $f(z) \rightarrow \infty$
つまり、$f(z)$ は

$$z = 1, \qquad z^2 = 1, \qquad z^4 = 1, \qquad z^8 = 1, \qquad \cdots$$

で発散。この様な特異点は単位円の上を埋め尽くす $\rightarrow$ $f(z)$ は $|z| = 1$ を超えて解析接続出来ない。

∘ 解析接続された解析函数の列 (f_i, Ω_i) (Weierstrass の函数要素) は互いに同値関係によって結ばれる。この同値関係を大域的解析函数と呼んで $\mathbf{f}$ で表す。(f_i, Ω_i) は一意的に $\mathbf{f}$ を決めるが、逆はなりたたない。同じ Ω の上で $\mathbf{f}$ はいくつかの枝を持つことがある。

∘ 2 つの経路 PBQ と $PB'Q$ により P 点における解析函数が Q 点に解析接続された時、結果として生じた Q 点での 2 つの冪級数が同じであるという保証はない。一般には異なる枝の函数を与える。図 (省略) の $PBQB'P$ の閉曲線によって囲まれた領域に特異点がなければ O.K. 単連結領域であれば O.K.

∘ 1 つの解析函数の極限が複素平面の異なった部分で異なった解析函数を表す例

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{1+z^n}-\frac{1}{1+z^{n-1}}\right)$$

部分和をとると

$$\begin{aligned}
f_N(z) &= \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\sum_{n=1}^{N}\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{1+z^n}-\frac{1}{1+z^{n-1}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)+\left(z-\frac{1}{z}\right)\frac{1}{1+z^N}\\
&= \frac{1}{z}+\left(z-\frac{1}{z}\right)\frac{1}{1+z^N}
\end{aligned}$$

この級数は $z \neq 0$ と $|z| \neq 1$ の各点で収束 (一般には条件収束)

$$\lim_{N\to\infty} f_N(z) = \begin{cases} z & \text{for} \quad |z|<1 \\ \frac{1}{z} & \text{for} \quad |z|>1 \end{cases}$$

$\rightarrow$ 二つの全く異なった函数

(理由) $|z|=1$ 　の近くで収束は一様でないので $f_N(z)$ の解析性が伝わらない。

(例 1)

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z|<1\\
f_2(z) &= \int_0^{\infty} e^{-(1-z)t}dt \qquad \Re e\, z<1\\
f_3(z) &= -\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right) \qquad |z|>1
\end{aligned}$$

これらは単一の解析函数 $f(z)=\frac{1}{1-z}$ $(z\neq 1)$ の異なる領域での異なる表現を与える。

$$\begin{aligned}
f_2(z) &= -\frac{1}{1-z}e^{-(1-z)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1-z} \qquad \text{if} \qquad \Re e\ (1-z)>0 \quad \rightarrow \quad \Re e\ z<1\\
f_3(z) &= -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{1-z}
\end{aligned}$$

(例 2)　Γ-函数

$$\Gamma(z) \;=\; \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \qquad (\Re e\, z > 0) \qquad \text{(Euler の第 2 積分)}$$

を解析接続して得られる函数 $\Gamma(z)$ を Γ-函数という。

2.6.2　無限級数 (あるいは無限函数列) の微分・積分

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f_N(x) + R_N(x)$$

部分和 $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$ をとれば同じなので、函数列で考える。

[実函数の場合]

$\{f_n(x)\}$: 連続函数の無限列が $\boldsymbol{x}$ **について一様に** $f(x)$ に収束する時

(A) $f(x)$ は連続

(B) $\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(x)dx = \int_a^x f(x)dx$ $(= \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx)$　(極限と積分の順序交換可能)

(C) $f_n(x)$ が連続的微分可能 ($f_n'(x)$ が連続) で $\boxed{\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = t(x) \text{ が一様収束}}$ なら、$f(x)$ も微分可能で $f'(x) = t(x)$
($\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x) = \frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{d}{dx}f(x)$　(極限と微分の順序交換可能)

(証明) (A)、(B) 省略

(C) $f_n(x)$ が連続的微分可能 ($f_n'(x)$ が連続) なら簡単。この場合 (A) より $t(x)$ は連続

$$\begin{aligned}\int_a^x t(x)dx \;&=\; \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(x)dx \quad \leftarrow \quad \text{(B)} \\ &=\; \lim_{n\to\infty}\{f_n(x) - f_n(a)\} = f(x) - f(a) \qquad \leftarrow \quad f(x),\ f(a) \text{ の存在}\end{aligned}$$

x で微分して $t(x) = f'(x)$

[正則函数の場合]

$\{f_n(z)\}$: 領域 D で定義された正則函数無限列が D に含まれる任意の領域 D' で**一様に** $f(z)$ に収束する時

(A) $f(x)$ は D で正則

(B) D における任意の曲線 C に対して　$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)dz$

(C) $f'(z) = \lim_{n\to\infty} f_n'(z)$　or　何回でも微分可能で　$f^{(m)}(z) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(m)}(z)$

(証明)

(A) Morera の定理によるのが一番簡単。γ を D 内に完全に含まれる任意の contour とすると、一様収束性より

$$\begin{aligned}&{}^\forall\varepsilon>0 \qquad {}^\exists N \quad (\text{independent of } z\in\gamma)\\ &\langle\langle \quad {}^\forall n>N \qquad |f_n(z)-f(z)|<\varepsilon \quad \rangle\rangle\end{aligned}$$

そこで γ の長さを ℓ として

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_\gamma (f(z)-f_n(z))dz\right| \le \int_\gamma |f(z)-f_n(z)|\,|dz| \le \varepsilon\ell$$

ε は任意より $\int_\gamma f(z)dz = 0$ for ${}^\forall\gamma\subset D$。Morera の定理により $f(x)$ は D で正則。

(B) C 上での一様収束性による。

(C) C を D に完全に含まれる contour、z を C 内の任意の点として、Goursat の公式より

$$\begin{aligned}f^{(m)}(z) &= \frac{m!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{m+1}}d\zeta\\ f_n^{(m)}(z) &= \frac{m!}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{m+1}}d\zeta\\ \left|f^{(m)}(z)-f_n^{(m)}(z)\right| &\le \frac{m!}{2\pi}\int_C \frac{|f(\zeta)-f_n(\zeta)|}{d^{m+1}}|d\zeta| \le \varepsilon\,\frac{m!}{2\pi}\frac{\ell}{d^{m+1}} \to 0\end{aligned}$$

ここに、d は z と C の距離 $d=\inf_{\zeta\in C}|z-\zeta|$、$\ell$ は C の長さ。

(注意)

1) 実函数の場合は $f_n'(x)$ の一様収束性が必要。正則函数では $f(z)$ の一様性だけで全て片付く。(Cauchy の積分定理、Goursat の定理の応用) ($f_n'(x)$ が一様収束: 冪級数の場合と同様)
2) D の境界では、一般には何もいえない。

(例)

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\cdots \qquad (|z|<1 \text{ で絶対一様収束})$$

$$\log(1+z) = z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\cdots \qquad \text{for} \qquad |z|<1$$

この場合は、$z=1$ でも展開可能で

$$\log 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots \qquad \text{Note (I) p.24 参照}$$

2.6.3 積分で表された函数の微分 (実函数)

“簡単のため $f(t,x)$ の t と z の 2 変数としての連続性を仮定する” (Titchmarsh p.59)

$$f(t,x)\ ,\quad f_x(t,x)=\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)\ ,\quad t\in[a,b]\ ,\quad x\in[\alpha,\beta]\quad \text{(有限区間)}$$

が t と z の 2 変数の函数として連続とする。

(A) $F(x)=\int_a^b f(t,x)dt$ は連続

(B) $\frac{d}{dx}F(x)=\int_a^b\left(\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)\right)dt$ (積分と微分の順序の交換可能)

(証明)

(A) $f(t,x)$ が 2 変数として連続 ($\to$ 一様連続) より

$$\begin{array}{l} {}^\forall\varepsilon>0 \qquad {}^\exists\delta \quad \text{(independent of } t \text{ and } x\text{)} \\ \langle\langle \quad |t-t'|+|x-x'|<\delta \qquad |f(t,x)-f(t',x')|<\varepsilon \quad \rangle\rangle \end{array}$$

or $t=t'$ として

$$|x-x'|<\delta \qquad |f(t,x)-f(t,x')|<\varepsilon$$

$$\begin{aligned} |F(x+h)-F(x)| &= \left|\int_a^b (f(t,x+h)-f(t,x))dx\right| \\ &\le \int_a^b |f(t,x+h)-f(t,x)|\,dx \le \varepsilon(b-a)\to 0 \end{aligned}$$

(B) $f_x(t,x)$ が連続より、第 1 平均値の定理を用いると

$$f(t,x+h)-f(t,x)=hf_x(t,x+\theta h) \qquad \text{with} \qquad 0\le\theta\le 1$$

ところで $f_x(t,x)$ は x について t によらず一様連続より

$$\begin{array}{l} {}^\forall\varepsilon>0 \qquad {}^\exists\delta \quad \text{(independent of } t\text{)} \\ \langle\langle \quad |x-x'|<\delta \qquad |f_x(t,x)-f_x(t,x')|<\dfrac{\varepsilon}{b-a} \quad \rangle\rangle \end{array}$$

そこで ${}^\forall h<\delta$ ととると $|\theta h|<\delta$ より

$$\begin{aligned} &\left|\int_a^b \frac{f_x(t,x+h)-f_x(t,x)}{h}dt-\int_a^b f_x(t,x)dt\right| \\ \le\ &\int_a^b |f_x(t,x+\theta h)-f_x(t,x)|\,dt<\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon \end{aligned}$$

従って $h \to 0$ の極限が存在して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(t,x+h)-f(t,x)}{h}dt \\ &= \int_a^b f_x(t,x)dt = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)\right)dt\end{aligned}$$

[無限積分の場合]

$b=\infty$ の場合も、もし

i) $F(x) = \int_a^\infty f(t,x)dt$ が収束し

ii) $\int_a^\infty \left(\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)\right)dt$ が $x \in [\alpha,\beta]$ で一様収束

すれば (B) が成り立つ。もし、i) も一様収束なら (A) も成り立つ。

(証明)

(A)　i) が一様収束すれば

$$\begin{aligned}&{}^\forall\varepsilon > 0 \qquad {}^\exists X \quad \text{(independent of } x) \\ &\langle\langle \quad {}^\forall\xi \geq X \qquad \left|\int_\xi^\infty f(t,x)dt\right| < \varepsilon \quad \rangle\rangle\end{aligned}$$

更に、$f(t,x)$ が 2 変数として連続より

$$\begin{aligned}&{}^\exists\delta \quad \text{(independent of } t) \\ &\langle\langle |x-x'| < \delta \qquad |f(t,x)-f(t,x')| < \frac{\varepsilon}{X-a} \quad \rangle\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^\infty f(t,x)dt - \int_a^\infty f(t,x')dt\right| \leq \left|\int_a^X (f(t,x)-f(t,x'))\,dt\right| + \left|\int_X^\infty f(t,x)dt\right| \\ &+ \left|\int_X^\infty f(t,x')dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{X-a}(X-a)+\varepsilon+\varepsilon = 3\,\varepsilon \qquad \to \qquad F(x) \text{ は連続}\end{aligned}$$

(B)

$$\int_\alpha^x f_x(t,x)dx = f(t,x)-f(t,\alpha) \qquad x \in [\alpha,\beta]$$

$f_x(t,x)$ は 2 変数に対して連続より、有限区間 $t \in [a,\xi]$、$[\alpha,x]$ に対して

$$\int_\alpha^x \left\{\int_a^\xi f_x(t,x)dt\right\}dx = \int_a^\xi \left\{\int_\alpha^x f_x(t,x)dx\right\}dt$$

そこで、ii) から、$\int_a^\infty f_x(t,x)dt$ は x の函数として連続より

$$\begin{aligned}&\left|\int_\alpha^x \left\{\int_a^\infty f_x(t,x)dt\right\}dx - \int_a^\xi \left\{\int_\alpha^x f_x(t,x)dx\right\}dt\right| \\ &= \left|\int_\alpha^x \left\{\int_\xi^\infty f_x(t,x)dt\right\}dx\right| < \varepsilon(x-a)\end{aligned}$$

そこで、$\xi\to\infty$ としてよいから $\lim_{\xi\to\infty}\int_a^\xi \left\{\int_\alpha^x f_x(t,x)dx\right\}dt$ が存在して $\int_\alpha^x \left\{\int_a^\infty f_x(t,x)dt\right\}dx$ に等しい。つまり

$$\begin{aligned}\int_\alpha^x \left\{\int_a^\infty f_x(t,x)dt\right\}dx &= \int_a^\infty \left\{\int_\alpha^x f_x(t,x)dx\right\}dt = \int_a^\infty \{f(t,x)-f(t,\alpha)\}dt \\ &= \int_a^\infty f(t,x)dt - \int_a^\infty f(t,\alpha)dt \qquad \leftarrow \qquad \text{i)}\end{aligned}$$

そこで、$\int_a^\infty f_x(t,x)dt$ は x の函数として連続より、x で微分して

$$\int_a^\infty f_x(t,x)dt = \frac{d}{dx}\int_a^\infty f(t,x)dt \qquad \rightarrow \qquad \frac{d}{dx}F(x) = \int_a^\infty \left(\frac{\partial}{\partial x}f(t,x)\right)dt$$

2.6.4 無限積分によって表される解析函数

(Wittacker-Watson p.92 5.32)

$$f(t,z) \qquad t\in[a,\infty) \qquad z\in D \text{ (領域)}$$

(i) $\int_a^\infty f(t,z)dt$ が $^\forall z\in D$ に対して収束する

(ii) $f(t,z)$ は $^\forall t\in[a,\infty)$ に対して D 内で解析的

(iii) $\frac{\partial}{\partial z}f(t,z)$ が t と z の 2 変数として連続

(iv) $\int_a^\infty \frac{\partial}{\partial z}f(t,z)dt$ が D 内で一様に収束

この時

$$F(z) = \int_a^\infty f(t,z)dt$$

は D 内で解析的で

$$F(z)' = \frac{\partial}{\partial z}\int_a^\infty f(t,z)dt = \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial z}f(t,z)dt$$

(証明)

$$g(t,z) \equiv \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}$$

は $t\in[a,\infty)$ において z の解析函数である。そこで $z_0\in D$ の近傍内では原始函数が存在し、それが $f(t,z)$ である。つまり

$$\int_{z_0}^{z} g(t,z)dz = f(t,z)-f(t,z_0)$$

一方、$g(t,z)$ は t と z の 2 変数として連続 ((iii)) だから、有限の ξ をとると $t\in[a,\xi]$, z_0 を含む小さな閉区間の中では積分できて

$$\int_a^{\xi}\left\{\int_{z_0}^{z} g(t,z)dz\right\}dt = \int_{z_0}^{z}\left\{\int_a^{\xi} g(t,z)dt\right\}dz$$

が成り立つ。Morera の定理から $\int_a^{\xi} g(t,z)dt$ が z の解析函数であることは簡単にわかる。ここで $\xi\to\infty$ と変えた

$$\int_a^{\infty} g(t,z)dt = \int_a^{\infty}\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}dt$$

は、((iv) から) 解析函数の一様収束積分として解析的で [前の section の (A)]、積分

$$\int_{z_0}^{z}\left\{\int_a^{\infty} g(t,z)dt\right\}dz$$

は有限確定である。更に、(iv) から

$$\begin{array}{lll} {}^{\forall}\varepsilon>0 & {}^{\exists}X & (\text{independent of } z\in D) \\ \langle\langle\ \ {}^{\forall}\xi\geq X & & \left|\displaystyle\int_{\xi}^{\infty} g(t,z)dt\right|<\varepsilon \quad \rangle\rangle \end{array}$$

そこで

$$\begin{aligned} &\left|\int_{z_0}^{z}\left\{\int_a^{\infty} g(t,x)dt\right\}dz - \int_a^{\xi}\left\{\int_{z_0}^{z} g(t,z)dz\right\}dt\right| \\ &=\left|\int_{z_0}^{z}\left\{\int_{\xi}^{\infty} g(t,z)dt\right\}dz\right| < \varepsilon\int_{z_0}^{z}|dz| = \varepsilon\times(\text{有限}) \end{aligned}$$

より $\lim_{\xi\to\infty}\int_a^{\xi}\left\{\int_{z_0}^{z} g(t,z)dz\right\}dt$ が存在して、それが $\int_{z_0}^{z}\{\int_a^{\infty} g(t,z)dt\}dz$ に等しい。つまり

$$\int_{z_0}^{z}\left\{\int_a^{\infty} g(t,z)dt\right\}dz = \int_a^{\infty}\left\{\int_{z_0}^{z} g(t,z)dz\right\}dt$$

そこで、$\int_a^{\infty} f(t,z)dt$ が存在するから

$$\begin{aligned} &F(z)' = \frac{\partial}{\partial z}\int_a^{\infty} f(t,z)dt = \frac{\partial}{\partial z}\int_a^{\infty}\left(f(t,z)-f(t,z_0)\right)dt \\ &= \frac{\partial}{\partial z}\int_a^{\infty}\left\{\int_{z_0}^{z} g(t,z)dz\right\}dt = \frac{\partial}{\partial z}\int_{z_0}^{z}\left\{\int_a^{\infty} g(t,z)dt\right\}dz = \int_a^{\infty} g(t,z)dt \end{aligned}$$

つまり、$F(z)=\int_a^\infty f(t,z)dt$ の微分が存在して、解析函数 $\int_a^\infty g(t,z)dt$ に等しい。ここから、$F(z)$ は解析的であることがわかる。更に、

$$F'(z)=\int_a^\infty g(t,z)dt=\int_a^\infty \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}dt$$

(注意)

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\int_a^\infty f(t,x)dt=\int_a^\infty \frac{\partial^2 f(t,z)}{\partial z^2}dt$$

が成り立つ事を言うには、右辺の一様収束性と $\frac{\partial^2 f(t,z)}{\partial z^2}$ が t と z の 2 変数について連続な事がいる。これは保証されない。冪級数の場合は、何回微分しても絶対一様収束であったから、簡単な性質が成り立ったのである。

(例)　Laplace 変換型の積分

$$g(z)=\int_0^\infty e^{-tz}f(t)dt$$

$f(t)$: 連続で　$|f(t)|<Ke^{rt}$　($K,\ r$ は independent of t)

この時、積分 $g(z)$ は $\Re e\ z\geq r_1>r$ なる領域で解析的

(証明) (ii), (iii) は明らか。この場合は、非積分函数は z で何回微分しても $t^n e^{-tz}f(t)$ が t と z の 2 変数について連続となる。

(i) :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|e^{-tz}f(t)\right|dt &\leq K\int_0^\infty \left|e^{-(z-r)t}\right|dt=K\int_0^\infty e^{-(\Re e\,z-r)t}dt\\ &\leq \int_0^\infty e^{-(r_1-r)t}dt=K\frac{1}{r_1-r}\leq\infty \quad \text{for} \quad r_1>r\end{aligned}$$

(iv) : $\int_0^\infty te^{-tz}f(t)dt$ あるいはもっと一般的に $\int_0^\infty t^n e^{-tz}f(t)dt$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ が一様収束すればよい。

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|t^n e^{-tz}f(t)\right|dt &\leq K\int_0^\infty t^n e^{-(r_1-r)t}dt=K\frac{1}{(r_1-r)^{n+1}}\int_0^\infty t^n e^{-t}dt\\ &= K\frac{1}{(r_1-r)^{n+1}}\Gamma(n+1)=K\frac{n\,!}{(r_1-r)^{n+1}}<\infty \quad \text{(一様)} \quad \text{O.K.}\end{aligned}$$

2.6.5 Γ-函数

(復習)　[実 2 変数函数の無限積分に関する定理]

○ $f(t,x)$ が t と x の双方について 2 変数函数として連続であり

$$\int_0^\infty f(t,x)\ dt$$

が x について一様収束ならば $\int_0^\infty f(t,x)\ dt$ は x の連続函数

○ 更に、$\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ が t と x の 2 変数の函数として連続であり、積分

$$\int_0^\infty \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} dt$$

が一様収束すれば $\int_0^\infty f(t,x)dt$ は x の函数として微分可能であり

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty f(t,x)\ dt = \int_0^\infty \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} dt$$

が成り立つ。

[実変数の Γ-函数]

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \qquad (x > 0)$$

は $x > 0$ (の任意の閉区間) で一様収束で x の連続函数、かつ無限回微分可能である。

(証明) 異常積分である両端での一様収束性が問題である。$0 \sim \infty$ を $[0,1]$ と $[1,\infty]$ に分けて考える。$s_1 > x > s_0 > s_0' > 0$ なる $s_1,\ s_0,\ s_0'$ を固定すると

$[1,\infty)$:

$$\int_1^\infty dt\ e^{-t} t^{x-1} < \int_1^\infty dt\ e^{-t} t^{s_1-1} < \infty$$

$s_1 - 1$ は有限の冪でおさえられる。それから $1 \to 0$ として $\Gamma(n+1) = n!$ を使う。

$[0,1]$:

$$\int_0^1\ dt e^{-t} t^{x-1} < \int_0^1 dt\ e^{-t} t^{s_0-1} < \int_0^1 dt\ t^{s_0-1} = \left.\frac{t^{s_0}}{s_0}\right|_0^1 = \frac{1}{s_0} < \infty$$

x で何回微分しても、同様なことがいえる。この時 $t^{x-1} = e^{(x-1)\log t}$ かつ $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n t^{x-1} = t^{x-1} (\log t)^n$ より

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty dt\ e^{-t} t^{x-1} (\log t)^n \qquad (x > 0)$$

右辺の積分が一様収束ならよい。

$[X, \infty)$:

$$\int_1^\infty dt\ e^{-t} t^{s_1-1} (\log t)^n = \int_1^\infty dt\ e^{-t} t^{s_1+n-1} \left(\frac{\log t}{t}\right)^n$$

1 の代わりに X を十分大きくとって $s_1 + n - 1 < m$ (整数) ととると $\frac{\log t}{t} < 1$ for $t > X$ で

$$\int_X^\infty dt\ e^{-t} t^{s_1-1} (\log t)^n \leq \int_X^\infty dt\ e^{-t} t^m \leq \int_0^\infty dt\ e^{-t} t^m = \Gamma(m+1) = m\,! < \infty$$

$[0, \delta]$: 1 の代わりに十分小さい $\delta > 0$ をとればよい。

$$\lim_{t \to 0} t^\alpha (\log t)^n = \lim_{x \to \infty} e^{-\alpha x} (-x)^n = 0 \qquad \text{for} \quad \alpha > 0,\ n = 0,\ 1,\ 2, \cdots$$

より $\alpha = s_0 - s_0'$ として

$$^\forall \varepsilon \quad ^\exists \delta > 0 \qquad \langle\langle \quad 0 < t < \delta \qquad \text{に対して} \quad t^{s_0 - s_0'} |\log t|^n < \varepsilon \quad \rangle\rangle$$

そこで

$$\begin{aligned}
&\int_0^\delta dt\ e^{-t} t^{s_0-1} |\log t|^n \leq \int_0^\delta dt\ t^{s_0'-1}\ t^{s_0-s_0'} |\log t|^n \\
&< \varepsilon \int_0^\delta dt\ t^{s_0'-1} = \varepsilon \frac{\delta^{s_0'}}{s_0'} \to 0 \qquad \text{for a fixed} \quad n = 0,\ 1,\ 2, \cdots
\end{aligned}$$

○ 部分積分によって

$$\Gamma(x+1) = x\ \Gamma(x) \qquad (x > 0)$$

が示せる。実際

$$\Gamma(x) = \left.\frac{1}{x} e^{-t} t^x \right|_0^\infty + \frac{1}{x} \int_0^\infty dt e^{-t} t^x = \frac{1}{x}\ \Gamma(x+1) \qquad (x > 0)$$

ここに

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \to 0} e^{-t} t^x = 0 \\
&\lim_{t \to \infty} e^{-t} t^x \leq \lim_{t \to \infty} e^{-t} t^n = \lim_{t \to \infty} \frac{t^n}{e^t} = \lim_{t \to \infty} \frac{n\,!}{e^t} = 0 \qquad (x < {}^\exists n)
\end{aligned}$$

[複素変数の Γ-函数]

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \qquad (\Re e\ z > 0)$$

と定義する。ここに $t^{z-1}=e^{(z-1)\log t}$ として $\log t$ の主値をとる。

$z=x+iy$ として $x>0$ かつ

$$\int_0^\infty dt\ \left|e^{-t}t^{z-1}\right| = \int_0^\infty dt\ e^{-t}e^{(x-1)\log t} = \int_0^\infty dt\ e^{-t}t^{x-1} = \Gamma(x)$$

より $\Re e\ z>0$ 内の任意の閉領域で一様収束である。非積分函数は t と z の 2 変数に対して連続。$\Re e\ z>0$ 内の任意の閉曲線 γ について z で積分すると、一様収束性より z の積分と t の積分の順序が交換できて

$$\int_\gamma \Gamma(z)dz = \int_\gamma dz \int_0^\infty dt\ e^{-t}t^{z-1} = \int_0^\infty dt\ e^{-t}\int_\gamma t^{z-1}dz$$

$$\int_\gamma t^{z-1}dz = \int_\gamma e^{(z-1)\log t}dz = 0 \qquad \text{for} \qquad {}^\forall t>0$$

より

$$\int_\gamma \Gamma(z)dz = 0$$

Morera の定理より $\Gamma(z)$ は $\Re e\ z>0$ で解析的。同様に

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^\infty dt\ e^{-t}t^{z-1}(\log t)^n \qquad (\Re e\ z>0)$$

が示せる。

○ $\Gamma(z)$ は $z=x>0$ の時、実函数の Γ-函数と一致するから、その $\Re e\ z>0$ 平面への解析接続による拡張となっている。実変数の時と同様に

$$\Gamma(z+1) = z\ \Gamma(z) \qquad (\Re e\ z>0)$$

○ $\Gamma(z+1)=z\ \Gamma(z)$ for $\Re e\ z>0$ を使って

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\ \Gamma(z+1)$$

とすると、$\Gamma(z)$ は $\Re e\ z>-1$ まで右辺の式により解析接続される。$z=0$ (1 次の極) の留数は $\lim_{z\to0} z(\Gamma(z+1)/z)=\Gamma(1)=1$

同様に

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \frac{1}{z(z+1)}\ \Gamma(z+2) \qquad \Re e\ z>-2 \\
&= \frac{1}{z(z+1)(z+2)}\ \Gamma(z+3) \qquad \Re e\ z>-3 \\
&= \cdots \\
&= \frac{1}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\ \Gamma(z+n+1) \qquad \Re e\ z>-(n+1)
\end{aligned}$$

とつぎつぎとに定義される。結局、$\Gamma(z)$ は $z=0,\ -1,\ -2,\cdots$ での 1 次の極 (その留数は $(-1)^n(1/n\,!)$ を除いて全複素平面で解析的な函数となる。

$n\to\infty$ へ行くと

$$\Gamma(n+z+1)\to n\,!\,n^z$$

が示せる。そこで

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,!\,n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\qquad \text{(Gauss の公式)}$$

(注意) $\Gamma(n+z+1)=(n+z)\,!$ と考えて、形式的に変形すると

$$\begin{aligned}&(n+z)\,!=n\,!\,\frac{(n+z)\,!}{n\,!}=n\,!\,(n+1)(n+2)\cdots(n+z)\\&=n\,!\,n^z\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)\to n\,!\,n^z\quad \text{証明になっていない！}\end{aligned}$$

○ Gauss の公式を変形すると、以前の Weierstrass の公式が得られる。実際、$x>0$ として

$$\Gamma_n(x)=\frac{n\,!\,n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

とすると

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma_n(x)}&=x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)n^{-x}\\&=x\left\{(1+x)e^{-x}\right\}\left\{\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\right\}\cdots\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right\}\\&\quad\times e^{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)x}\end{aligned}$$

ここに

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)=0.5772156\cdots\qquad \text{(Euler 定数)}$$

は収束するから、$n\to\infty$ とおいて

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Gamma_n(x)}=xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$$

右辺の無限乗積は絶対一様収束である。

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\qquad \text{(Weierstrass の公式)}$$

○ $\Gamma_n(x)$ は

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n \xi^{x-1} \left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^n d\xi \qquad (x > 0)$$

により得られる。実際

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left\{ \left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^{\frac{n}{\xi}} \right\}^{\xi} = e^{-\xi}$$

($\leftarrow \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e$) より $\lim_{n\to\infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x)$ はもっともらしい。

(証明)　$\xi/n = \eta$ とおいて

$$\begin{aligned} \Gamma_n(x) &= \int_0^1 (n\eta)^{x-1}(1-\eta)^n n d\eta \\ &= n^x \int_0^1 \eta^{x-1}(1-\eta)^n d\eta = n^x\ \gamma_n(x) \end{aligned}$$

ここに

$$\gamma_n(x) = \int_0^1 \eta^{x-1}(1-\eta)^n d\eta \qquad (x > 0)$$

部分積分して

$$\begin{aligned} \gamma_n(x) &= \left[\frac{1}{x}\eta^x(1-\eta)^n \right]_0^1 + \frac{\eta}{x}\int_0^1 \eta^x (1-\eta)^{n-1} d\eta \\ &= \frac{n}{x}\gamma_{n-1}(x+1) \qquad n = 1,\ 2, \cdots \qquad x > 0 \end{aligned}$$

これを繰り返して

$$\gamma_n(x) = \frac{n}{x}\frac{n-1}{x+1}\frac{n-2}{x+2}\cdots\frac{1}{x+n-1}\ \gamma_0(x+n)$$

ところで

$$\gamma_0(x) = \int_0^1 \eta^{x-1} d\eta = \left.\frac{\eta^x}{x}\right|_0^1 = \frac{1}{x} \qquad (x > 0)$$

より

$$\gamma_n(x) = \frac{n\,!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

そこで

$$\Gamma_n(x) = \frac{n\,!\ n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

○ 最後に $\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)=\Gamma(x) \quad (x>0)$ を示す

$$u_n(\xi)=\left(1-\frac{\xi}{n}\right)^n \qquad \text{for} \qquad 0<\xi<n \qquad n=1,\ 2,\ 3,\cdots$$

は n に関して単調増大であることがいえる。

$$u_{n-1}(\xi)<u_n(\xi)<u_{n+1}(\xi)<\cdots<e^{-\xi} \qquad \text{かつ} \qquad \lim_{n\to\infty}u_n(\xi)=e^{-\xi}$$

今これを認めると

$$\begin{aligned}\Gamma_n(x) &= \int_0^n \xi^{x-1}\ \left(1-\frac{\xi}{n}\right)^n d\xi<\int_0^n \xi^{x-1}\ \left(1-\frac{\xi}{n+1}\right)^{n+1} d\xi \\ &< \int_0^{n+1} \xi^{x-1}\ \left(1-\frac{\xi}{n+1}\right)^{n+1} d\xi=\Gamma_{n+1}(x) \\ &< \int_0^{n+1} \xi^{x-1}e^{-\xi}d\xi<\int_0^{\infty}\xi^{x-1}e^{-\xi}d\xi=\Gamma(x)\end{aligned}$$

より

$$\Gamma_n(x)<\Gamma_{n+1}(x)<\Gamma_{n+2}(x)<\cdots<\Gamma(x)$$

そこで $\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)\leq\Gamma(x)$$

一方 $^\forall n$ に対して $0<a<n$ なる a を選べば

$$\int_0^a \xi^{x-1}\ \left(1-\frac{\xi}{n}\right)^n d\xi<\int_0^n \xi^{x-1}\ \left(1-\frac{\xi}{n}\right)^n d\xi=\Gamma_n(x)$$

左辺は単調増大な正項級数より $n\to\infty$ へ行って

$$\int_0^a \xi^{x-1}e^{-\xi}d\xi\leq\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)$$

$a\to\infty$ としてよいから

$$\Gamma(x)\leq\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)$$

そこで

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)=\Gamma(x)$$

(単調増大であること)

$a > b$ の時 $n \geq 1$ に対して

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

を使うと

$$na^{n-1} > \frac{a^n - b^n}{a - b} > nb^{n-1}$$

ここで

$$a = 1 - \frac{\xi}{n} \quad , \qquad b = 1 - \frac{\xi}{n-1} \qquad (0 < \xi < n-1)$$

とおいて

$$\left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{\xi}{n-1}\right)^n > \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \xi n \left(1 - \frac{\xi}{n-1}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{\xi}{n-1} \left(1 - \frac{\xi}{n-1}\right)^{n-1}$$

そこで

$$\left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^n > \left(1 - \frac{\xi}{n-1}\right)^n + \frac{\xi}{n-1} \left(1 - \frac{\xi}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{\xi}{n-1}\right)^{n-1}$$

そこで

$$u_{n-1}(\xi) < u_n(\xi) \qquad \text{for} \qquad 0 < \xi < n-1 \qquad (\text{単調増大})$$

更に

$$\frac{d}{dt}\left\{e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right\} = e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{t}{n} - 1\right) = -e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \frac{t}{n}$$

そこで

$$\int_0^\xi dt \; e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \frac{t}{n} = \left[-e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right]_0^\xi = -e^\xi \left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^n + 1$$

or

$$e^{-\xi} - \left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^n = e^{-\xi} \int_0^\xi dt \; e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \frac{t}{n} > 0 \qquad \text{for} \qquad \xi < n$$

一方 $0 < t < \xi$ に対して $e^t < e^\xi$ かつ $(1 - t/n) < 1$ より

$$e^{-\xi} \int_0^\xi dt \; e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \frac{t}{n} < e^{-\xi} e^\xi \int_0^\xi \frac{t}{n} dt = \frac{\xi^2}{2n}$$

つまり

$$0 < e^{-\xi} - \left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^n < \frac{\xi^2}{2n} \qquad \text{for} \qquad 0 < \xi < n$$

$n \to \infty$ へ行って

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^n = e^{-\xi}$$

2.7 調和函数

例えば、岩堀長慶「ベクトル解析」(裳華房) 参照

(微分形式の基礎)

1) 1 次形式

$\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z \cdots\}$: $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間

$$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V} \qquad \boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z \qquad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

特に座標 $\quad \boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

“内積” $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{R}$ が ${}^\forall \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V}$ に定義されているとする。
実数値函数 $\varphi(\boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{R}$ が線形条件

$$\varphi(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \alpha\varphi(\boldsymbol{a}) + \beta\varphi(\boldsymbol{b})$$

を満たす時、φ を**1 次形式** (あるいは 1 形式, linear form, 1-form, etc.) という。1 次形式には $\boldsymbol{V}$ 内のベクトル $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_\varphi \in \boldsymbol{V}$ が 1:1 対応する。

$$\varphi(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) \qquad \text{for} \qquad {}^\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}$$

実際、$\varphi(\boldsymbol{e}_x) = c_x,\ \varphi(\boldsymbol{e}_y) = c_y,\ \cdots$ とすると

$$\varphi(\boldsymbol{a}) = a_x\varphi(\boldsymbol{e}_x) + a_y\varphi(\boldsymbol{e}_y) + \cdots = a_xc_x + a_yc_y + \cdots = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})$$

$\boldsymbol{c}$ を共変ベクトル、$\boldsymbol{a}$ を反変ベクトルという。これにより **1 次形式は共変ベクトル** とも呼ばれる。

2) ベクトル、テンソル

空間の点を $P = (x,\ y,\ z)$ で表して

$$S_P = S(x, y, z) \qquad : \quad \text{スカラー場}$$
$$\boldsymbol{V}_P = \begin{pmatrix} V_x(x, y, z) \\ V_y(x, y, z) \\ V_z(x, y, z) \end{pmatrix} \qquad : \quad \text{ベクトル場}$$

ベクトルとは、座標変換 $\boldsymbol{x}' = a\boldsymbol{x}$ に対して座標と同じように変換する量

$$x'_i = \sum_j a_{ij}x_j$$
$$V'_i = \sum_j a_{ij}V_j$$

同様にテンソルも

$$T'_{i_1 i_2} = \sum_{j_1 j_2} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} T_{j_1 j_2}$$

と定義する。

3) 1 次微分形式

1) の 1 次形式 φ は一般には空間の点 P に依存してよい。それを φ_P とすると、共変ベクトル $\boldsymbol{c}_{\varphi_P}$ も P に依存する。$\boldsymbol{a}$ を固定した時、$\varphi_P(\boldsymbol{a})$ はスカラー場、$\boldsymbol{c}_P = \boldsymbol{c}_{\varphi_P}$ はベクトル場である。共変ベクトル場 $\boldsymbol{c}_P$ と φ_P を同一視して φ_P を (1 次) 微分形式と呼ぶ。つまり、

$$\varphi_P(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \alpha\varphi_P(\boldsymbol{a}) + \beta\varphi_P(\boldsymbol{b})$$

(例) スカラー場 $F_P = F(x, y, z)$ があったとする。その全微分を

$$\omega = dF = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}dz$$

とし

$$\omega(\boldsymbol{a}) = (dF)(\boldsymbol{a}) = (\mathrm{grad}F, \boldsymbol{a}) = \frac{\partial F}{\partial x}a_x + \frac{\partial F}{\partial y}a_y + \frac{\partial F}{\partial z}a_z$$

と定義すると $\omega = dF$ は微分形式であり

$$\begin{aligned} (dF)(\boldsymbol{e}_x) &= \tfrac{\partial F}{\partial x} \\ (dF)(\boldsymbol{e}_y) &= \tfrac{\partial F}{\partial y} \\ (dF)(\boldsymbol{e}_z) &= \tfrac{\partial F}{\partial z} \end{aligned} \qquad \mathrm{grad}F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad : \quad \text{共変ベクトル場}$$

あるいは

$$\begin{aligned} (dx)(\boldsymbol{a}) &= a_x \\ (dy)(\boldsymbol{a}) &= a_y \\ (dz)(\boldsymbol{a}) &= a_z \end{aligned}$$

一般に、定義域 D 上で定義された 1 次微分形式 ω の成分を $\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z$ と書いて

$$\omega = \omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz = \sum_i \omega_i dx_i$$

と表示する。$\omega,\ \omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z$ は空間の点 P に依存する。(一般には $\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z$ の連続性を仮定)

$$\omega(\boldsymbol{a}) = \omega_x dx(\boldsymbol{a}) + \omega_y dy(\boldsymbol{a}) + \omega_z dz(\boldsymbol{a}) = \omega_x a_x + \omega_y a_y + \omega_z a_z = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{a})$$

$\omega \leftrightarrow \boldsymbol{\omega}$ 　　の対応がある。

2 次の微分形式 $\omega(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ はその成分により $\omega(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=\omega_{ij}$

$$\omega(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\omega\left(\sum_i a_i\boldsymbol{e}_i,\sum_j b_j\boldsymbol{e}_j\right)=\sum_{ij}a_ib_j\omega(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=\sum_{ij}a_ia_j\omega_{ij}$$

により定義する。特に、$dx_i\otimes dx_j$ の微分形式は

$$[dx_i\otimes dx_j]\,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=dx_i(\boldsymbol{a})dx_j(\boldsymbol{b})=a_ib_j$$

より

$$\omega(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum_{ij}\omega_{ij}\,[dx_i\otimes dx_j]\,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\left[\sum_{ij}\omega_{ij}dx_idx_j\right](\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\qquad\otimes\ \text{を省略}$$

そこで

$$\omega=\sum_{ij}\omega_{ij}dx_idx_j$$

これが 2 次の微分形式の一般形である。

4) 2 次の外微分形式

2 つの 1 次微分形式 $\varphi,\ \psi$ から

$$[\varphi\wedge\psi](\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\varphi(\boldsymbol{a})\psi(\boldsymbol{b})-\psi(\boldsymbol{a})\varphi(\boldsymbol{b})$$

により 2 次の外微分形式 $\varphi\wedge\psi$ を定義する。($\varphi,\ \psi$ は座標 P の函数) 明らかに

$$\begin{aligned}&\varphi\wedge\psi=-\psi\wedge\varphi\\&\varphi\wedge\varphi=0\\&\varphi\wedge\psi\ \text{は}\ \varphi\ \text{と}\ \psi\ \text{について双線形}\end{aligned}$$

同様に 3 次の外微分形式は

$$[\varphi_1\wedge\varphi_2\wedge\varphi_3](\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\det\{\varphi_1(\boldsymbol{a})\varphi_2(\boldsymbol{b})\varphi_3(\boldsymbol{c})\}$$

空間 3 次元なら、これ以上は 0

具体的には

$$\begin{aligned}\varphi&=\varphi_xdx+\varphi_ydy+\varphi_zdz\\\psi&=\psi_xdx+\psi_ydy+\psi_zdz\end{aligned}$$

の時、$dx \wedge dx = 0$, $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ 等を用いて

$$\begin{aligned}\omega &= \varphi \wedge \psi = (\varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz) \wedge (\psi_x dx + \psi_y dy + \psi_z dz) \\ &= (\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x)\, dx \wedge dy + (\varphi_y \psi_z - \varphi_z \psi_y)\, dy \wedge dz + (\varphi_z \psi_x - \varphi_x \psi_z)\, dz \wedge dx\end{aligned}$$

一般には 2 次の外微分形式は

$$\omega(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -\omega(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$$

の交代性を仮定する。成分は $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ より

$$\omega = \omega_{xy} dx \wedge dy + \omega_{yz} dy \wedge dz + \omega_{zx} dz \wedge dx$$

あるいは

$$\omega = \omega_x dy \wedge dz + \omega_y dz \wedge dx + \omega_z dx \wedge dy$$

となる。

5) 外微分形式の微分

1 次の微分形式 $\omega = \omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz$ の外微分を

$$d\omega = d\omega_x \wedge dx + d\omega_y \wedge dy + d\omega_z \wedge dz$$

で定義する。これは $d^2 = 0$ と同じ。もし、ω が連続的微分可能なら

$$\begin{aligned}d\omega &= \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x}\right) dz \wedge dx \\ &= (\mathrm{rot}\boldsymbol{\omega})_z dx \wedge dy + (\mathrm{rot}\boldsymbol{\omega})_x dy \wedge dz + (\mathrm{rot}\boldsymbol{\omega})_y dz \wedge dx\end{aligned}$$

2 次の外微分形式 $\omega = \omega_x dy \wedge dz + \omega_y dz \wedge dx + \omega_z dx \wedge dy$ に対しては

$$\begin{aligned}d\omega &= d\omega_x \wedge [dy \wedge dz] + d\omega_y \wedge [dz \wedge dx] + d\omega_z \wedge [dx \wedge dy] \\ &= d\omega_x \wedge dy \wedge dz + dx \wedge d\omega_y \wedge dz + dx \wedge dy \wedge d\omega_z \\ &= \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz = (\mathrm{div}\boldsymbol{\omega}) dx \wedge dy \wedge dz\end{aligned}$$

つまり

$$\begin{array}{ccc} \text{1 次微分形式 } \omega \text{ の外微分} & & d\omega = \text{2 次外微分形式} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \boldsymbol{\omega} & \longleftrightarrow & \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{2 次微分形式 } \omega \text{ の外微分} & & d\omega = \text{3 次外微分形式} \\ \updownarrow & & \updownarrow \end{array}$$

$$\boldsymbol{\omega} \qquad \longleftrightarrow \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{\omega}$$

6) 線積分、面積分 (2 次元)

1 次微分形式 $\omega = \omega_x dx + \omega_y dy$、ここに $\omega_x = \omega(\boldsymbol{e}_x)$ 等 (共変ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の成分 : 偏微分ではないので注意) に対して

$$\int_C \omega = \int_C \omega_x dx + \omega_y dy$$

をパラメータ積分により定義する。

面積分は 2 次の外微分形式 $\omega = a(dx \wedge dy)$ に対して、$x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ を平面のグラフとして

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) du \wedge dv \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du \wedge dv = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \end{aligned}$$

より

$$\int\int_{S_0} \omega = \int\int_{S_0} a dx \wedge dy = \int\int_{E_0} a \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du \wedge dv$$

として定義する。

7) 複素積分

$z = x + iy$ の複素数値函数 $f(z)$ が領域 D で **連続** なる時、$f(z) = u(z) + iv(z) = u + iv$ と書いて

$$f(z)dz = (u+iv)(dx+idy) = (udx - vdy) + i(vdx + udy) \quad \text{(実部と虚部は共役)}$$

これを一般化して

一般に 1 形式 $\varphi = \varphi_1 dx + \varphi_2 dy$ に対して、その共役形式 (dual form) を

$$^*\varphi = -\varphi_2 dx + \varphi_1 dy \qquad \text{for} \qquad \varphi = \varphi_1 dx + \varphi_2 dy$$

で定義する。

上の場合 $\varphi = udx - vdy$ とおけば

$$f(z)dz = \varphi + i\,^*\varphi$$

γ 上の積分は $\gamma(x(t),y(t)),\ \gamma(a)=z_0,\ \gamma(b)=z_1$ として

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \left[(ux'(t)-vy'(t))+i\left(vx'(t)+uy'(t)\right)\right]dt \\ &= \int_\gamma \varphi + i\int_\gamma {}^*\varphi\end{aligned}$$

8) 閉じた微分形式

1 形式 φ が連続的微分可能な函数 u を用いて

$$\varphi = du$$

と表される時、φ を完全微分形式 (exact differential form or total derivative) という。また、1 形式 φ が連続的微分可能で

$$d\varphi = 0$$

なる時、φ を閉微分形式 (closed differential form) という。

(注意) u が 2 回連続的微分可能なら

$$\varphi = du \qquad \longrightarrow \qquad d\varphi = d^2u = 0$$

局所的にはこの逆が成り立つ。

(局所的原始函数の存在定理)

「1 形式 φ が領域 D で連続的微分可能で $d\varphi=0$ の時、$^\forall c \in D$ のある近傍で 2 回連続的微分可能な函数 u が存在して

$$\varphi = du$$

と表される。

(証明) $\varphi=\varphi_1dx+\varphi_2dy$ とすると $\varphi_1=\varphi_1(x,y),\, \varphi_2=\varphi_2(x,y)$ は D において連続的微分可能だから $c=a+ib\in D$ として、或る近傍 (円板にとれる) 内での函数 u を

$$u=u(x,y)=\int_a^x \varphi_1(\xi,b)d\xi+\int_b^y \varphi_2(x,\eta)d\eta$$

と定義する。$u(x,y)$ は y について偏微分可能で

$$u_y(x,y)=\varphi_2(x,y)$$

一方、積分記号下での微分法より $u(x,y)$ は x についても微分可能で

$$u_x(x,y)=\varphi_1(x,b)+\int_b^y \frac{\partial\varphi_2(x,\eta)}{\partial x}d\eta$$

($\frac{\partial\varphi_2(x,\eta)}{\partial x}$ は x と η の 2 変数として連続だから η で積分するとき、x についての一様連続性が保証される。)

一方、仮定により

$$\begin{aligned} d\varphi &= d(\varphi_1 dx+\varphi_2 dy)=d\varphi_1\wedge dx+d\varphi_2\wedge dy=\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)dx\wedge dy=0 \\ &\longrightarrow \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \qquad \text{on} \quad D \end{aligned}$$

だから

$$\int_b^y \frac{\partial\varphi_2(x,\eta)}{\partial x}d\eta=\int_b^y \frac{\partial\varphi_1(x,\eta)}{\partial\eta}d\eta=\varphi_1(x,y)-\varphi_1(x,b)$$

から

$$u_x(x,y)=\varphi_1(x,y)$$

そこで $\varphi_1,\,\varphi_2$ は連続的微分可能より $u(x,y)$ は 2 回連続的微分可能、かつ

$$du=u_x dx+u_y dy=\varphi_1(x,y)dx+\varphi_2(x,y)dy=\varphi$$

2.7.1 正則 1 形式と調和 1 形式

○ $f(z)$ を領域 D における正則函数とする。$f(z)dz$ を正則 1 形式 (holomorphic 1-form) という。$f'(z)$ も正則だから、正則函数の微分 $df=f'(z)dz$ も正則 1 形式である。

「正則 1 形式の外微分は常に 0 」

実際

$$d(f(z)dz)=f'(z)\,dz\wedge dz=0$$

また、正則 1 形式を実部と虚部に分けて

$$f(z)dz=\varphi+i^*\varphi \qquad \text{with} \qquad \varphi=udx-vdy$$

とすると、φ も ${}^*\varphi$ も closed

$$d\varphi=0 \qquad \text{かつ} \qquad d({}^*\varphi)=0$$

○ 上を一般化して、1 形式 φ が領域 D で連続的微分可能で

$$d\varphi = 0 \qquad \text{かつ} \qquad d({}^*\varphi) = 0$$

の時、φ は D において調和 (harmonic) であるという。

"正則 1 形式 $f(z)dz$ の実部と虚部は、調和 1 形式である。"

また、逆に

○「ある領域において連続的微分可能な 1 形式 φ が調和なら、$\varphi + i^*\varphi$ は正則 1 形式である。」

(証明) $\varphi = udx - vdy$ とする。u, v は連続的微分可能で

$$\begin{aligned} d\varphi &= d(udx - vdy) = du \wedge dx - dv \wedge dy = (-u_y - v_x)dx \wedge dy = 0 \\ d^*\varphi &= d(vdx + udy) = (u_x - v_y)dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

より $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ つまり Cauchy-Riemann condition を満たす。従って、$f(z) = u + iv$ とおけば $f(z)$ は $z = x + iy$ の正則函数で

$$f(z)dz = (u + iv)(dx + idy) = (udx - vdy) + i(vdx + udy) = \varphi + i^*\varphi$$

つまり $\varphi + i^*\varphi$ は正則 1 形式である。

○ φ が調和 1 形式なら、その共役形式 ${}^*\varphi$ も調和 1 形式。従って、正則 1 形式の虚部も調和 1 形式。

2.7.2 調和函数

○ $f(z) = u + iv$ とする時

$$\begin{aligned} du &= u_x dx + u_y dy \quad , \qquad dv = v_x dx + v_y dy \\ {}^*du &= -u_y dx + u_x dy \end{aligned}$$

より Cauchy-Riemann の条件 (微分方程式) は

$${}^*du = dv$$

と書ける。そこで $f(z)$ が正則なら

$$d({}^*du) = d^2 v = 0$$

一方、一般に

$$
\begin{aligned}
d({}^*du) &= d(-u_y dx + u_x dy) = -du_y \wedge dx + du_x \wedge dy \\
&= (u_{xx} + u_{yy})\, dx \wedge dy = \Delta u\, dx \wedge dy \\
&\quad \text{with} \qquad \Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \qquad : \text{Laplacian}
\end{aligned}
$$

より、正則函数の実部 (実は虚部も) は Laplace の微分方程式

$$\Delta u = 0$$

を満たす。

「領域 D で定義された 2 回連続的微分可能な実数値函数 $u(x, y)$ が

$$\Delta u = 0$$

を満たす時、u を調和函数 (harmonic function) という。」

∘「領域 D で定義された調和函数 $u = u(z)$ は D の各点の十分小さい近傍において、ある正則函数の実数部分である。すなわち、ある正則函数 $f(z)$ が存在して、この近傍内で $u(z) = \Re e\, f(z)$. この様な正則函数は純虚数の定数だけを除いて一意的に決まる。」

(証明) ${}^*du$ は連続的微分可能な 1 形式で $d({}^*du) = \Delta u\, dx \wedge dy$ (${}^*du$ は閉じている) より (局所的原始函数の存在定理) から、2 回連続的微分可能な函数 v が存在して

$${}^*du = dv$$

と表される。これは Cauchy-Riemann の微分方程式だから $f(z) = u + iv$ が正則函数となる。この様な v は、(この近傍で) 定数だけ除いて一意的に決まる。$f'(z)$ も u により一意的に決まる D で定義された正則函数となる。$d(du) = d({}^*du) = 0$ より D において du は調和 1 形式、かつ $du + i\,{}^*du = du + idv = df = f'(z)dz$ は正則 1 形式である。そこで、1 点 $c_0 \in D$ を定めて ${}^\forall z \in D$ を D 内にある、区分的に滑らかな曲線 γ で結んで、改めて

$$f(z) = \int_\gamma^z f'(z)dz + u(c_0)$$

とおくと、$f(z)$ は D 全体に解析接続される。しかし、一般には $f(z)$ は多価函数である。

$$\int_\gamma^z du = u(z) - u(c_0)$$

を使うと

$$f(z) = \int_\gamma^z du + i \int_\gamma^z {}^*du + u(c_0) = u(z) + i \int_\gamma^z {}^*du$$

まとめると

「領域 D において、実調和函数 $u(z)$ が与えられた時

$$f(z) = u(z) + i\int_{\gamma}^{z} {}^{*}du$$

は D 全体に解析接続可能で、D で一般には多価の正則函数となる。また、

$$\Re e\, f(z) = u(z)$$

「更に、D が単連結であれば、D の実調和函数 $u = u(x, y)$ は D で正則なある函数 $f(z)$ の実部に等しい。」

2.7.3 平均値の性質 (The Mean-value Property)

以下、D を単連結領域とし、その中の任意の閉曲線 γ について考える。

$\circ$ D において u が実調和函数ならば

$$\int_{\gamma} {}^{*}du = 0$$

一般に、u_1, u_2 を D における調和函数とすると

$$\int_{\gamma} (u_1{}^{*}du_2 - u_2{}^{*}du_1) = 0$$

が示せる。

(証明) 仮定より、D で 1 価の共役函数 v_1, v_2 があって

$${}^{*}du_1 = dv_1 \quad , \qquad {}^{*}du_2 = dv_2$$

より

$$u_1{}^{*}du_2 - u_2{}^{*}du_1 = u_1 dv_2 - u_2 dv_1 = u_1 dv_2 + v_1 du_2 - d(u_2 v_1)$$

ところで $u_1 dv_2 + v_1 du_2$ は $(u_1 + iv_1)(du_2 + idv_2)$ の虚数部なので

$$f_1(z) = u_1 + iv_1 \quad , \qquad f_2(z) = u_2 + iv_2$$

をそれぞれ u_1, u_2 に対応する正則函数とすると

$$u_1{}^{*}du_2 - u_2{}^{*}du_1 = \Im m\ f_1(z) f_2'(z) dz - d(u_2 v_1)$$

そこで Cauchy の定理より

$$\int_\gamma (u_1{}^* du_2 - u_2{}^* du_1) = 0$$

が成り立つ。

○ 今 $u(z)$ を $z=0$ を除いて $|z|<\rho$ で調和とする。半径 r_1, r_2 $(0<r_1<r_2<\rho)$ の円 C_1, C_2 を考えて右図 (省略) の様な経路をとると、直線部分は打ち消しあうので

$$\int_\gamma = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \int_{C_1} = \int_{C_2}$$

となる。du と ${}^*du$ を極座標で書くと

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial \theta}d\theta \\ {}^*du &= -\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}dr + r\,\frac{\partial u}{\partial r}d\theta \end{aligned}$$

(確かめよ) となるので、円周上では

$${}^*du = r\,\frac{\partial u}{\partial r}d\theta \qquad \text{on} \quad |z|=r$$

となる。そこで $\int_\gamma = 0$ は

$$\int_{C_1} r\,\frac{\partial u}{\partial r}d\theta = \int_{C_2} r\,\frac{\partial u}{\partial r}d\theta$$

つまり

$$\int_{|z|=r} r\,\frac{\partial u}{\partial r}d\theta = \mathrm{const}$$

は $0<r<\rho$ で r によらず一定となる。特に u が $z=0$ でも調和なら γ として原点を囲む円を取る事が出来て、この値は 0 となる。

○ 同様に

$$\int_\gamma (u_1{}^* du_2 - u_2{}^* du_1) = 0$$

を $u_1 = \log r$, $u_2 = u$ について考えると

$$\int_{|z|=r} (\log r)\, r\frac{\partial u}{\partial r}d\theta - u d\theta = \mathrm{const}$$

そこで、一般に $r<\rho$ に対して

$$\int_{|z|=r} u d\theta = \alpha \log r + \beta$$

ここに α, β は r によらない定数である。特に、$u(z)$ が $|z| < \rho$ の円板内で調和なら $\alpha = 0, \beta = (2\pi)u(0)$ ($r \to 0$ ととる) で

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(re^{i\theta}\right) d\theta$$

が得られる。

$\zeta(z) = z + z_0$ により $z = 0 \to z_0$ へ移ると $U(z) = u(\zeta(z))$ が再び調和函数となる (下の注意参照) ことにより

$$\begin{aligned} u(z_0) &= u(\zeta(0)) = U(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\left(re^{i\theta}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta \end{aligned}$$

より

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta$$

が得られる。

(注意) 任意の " 線形変換"

$$\zeta(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

によって、調和函数はまた調和函数に移される。

(証明) 変数変換により

$$\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}\partial z}\, u = 0 \qquad \to \qquad \frac{\partial^2}{\partial\bar{\zeta}\partial\zeta}\, u = 0$$

を示す。

2.7.4 与えられた実部をもつ正則函数を見つける方法

H. カルタン「複素函数論」(岩波) p. 127 参照

○ $u = u(x, y)$ が半径 $\rho > 0$ の円板内 $|z| < \rho$ (単連結領域) で実調和函数であるとする。u は局所的には、或る正則函数の実部で与えられるから、今 $z = 0$ で考えて、ある冪級数が存在し

$$\begin{aligned} &f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad |z| < \rho \\ &\Re e\, f(z) = u(x, y) \qquad \text{for} \quad z = x + iy \end{aligned}$$

と表される。

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+iy)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p+q=n} a_n \frac{n\,!}{p\,!\,q\,!} x^p (iy)^q\right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} i^q a_{p+q}\frac{(p+q)\,!}{p\,!\,q\,!} x^p y^q \end{aligned}$$

を 2 変数 x, y の級数と考えると、この級数は $|x|+|y|<\rho$ なるすべての点 (x,y) で絶対一様収束する。実際、$|x|<r_1$, $|y|<r_2$, $r_1+r_2=r<\rho$ とすると

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}|a_{p+q}|\frac{(p+q)\,!}{p\,!\,q\,!}(r_1)^p(r_2)^q = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|(r_1+r_2)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n < \infty$$

特に、$f(z)$ は円板の積 $|x|<\rho/2$, $|y|<\rho/2$ に対して 2 変数函数として冪級数展開できるという意味で (実) 解析的である。

更に、$\overline{a_n}$ を係数とする冪級数

$$\bar{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n}z^n \qquad (\bar{f}(z) \text{ の定義})$$

を考えると

$$f(x+iy)+\bar{f}(x-iy) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+iy)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n}(x-iy)^n$$
$$= 2\,\Re e \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+iy)^n = 2\,\Re e\, f(z) = 2\,u(x,y)$$

より

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\Big[\,f(x+iy)+\bar{f}(x-iy)\Big] \qquad \text{for} \qquad |x|<\frac{\rho}{2},\ |y|<\frac{\rho}{2}$$

この式は、調和函数 $u(x,y)$ が右辺の 2 変数の冪級数の和として与えられる事を示している。この級数は、$|x|<\rho/2$, $|y|<\rho/2$ で絶対一様収束するから、2 複素変数 z_1 と z_2 の函数として $|z_1|<\rho/2$, $|z_2|<\rho/2$ の範囲まで解析接続される。それを、$u(z_1,z_2)$ と書くと

$$u(z_1,z_2) = \frac{1}{2}\Big[\,f(z_1+iz_2)+\bar{f}(z_1-iz_2)\Big] \qquad \text{for} \qquad |z_1|<\frac{\rho}{2},\ |z_2|<\frac{\rho}{2}$$

特に、$|z|<\rho$ の時 $z_1=z/2$, $z_2=z/2i$ とおくと

$$u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right) = \frac{1}{2}\Big[\,f(z)+\bar{f}(0)\Big]$$

$z=0$ とおいて

$$u(0,0)=\frac{1}{2}\left[\,f(0)+\bar{f}(0)\,\right]$$

上を 2 倍して、下を引くと

$$2u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)-u(0,0)=f(z)+\frac{1}{2}\left[\,\bar{f}(0)-f(0)\,\right]$$

つまり

$$f(z)=2u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)-u(0,0)-\frac{1}{2}\left[\,\bar{f}(0)-f(0)\,\right]$$

求める函数 $f(z)$ は純虚数定数だけを除けば、函数 $u(x,y)$ に実変数 x, y に関する 2 重級数に複素変数を代入して得られる既知の函数

$$2u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)-u(0,0)$$

に等しい。

○ $z=x+iy$ の時、上の実部が $u(x,y)$ に等しい事を示す。

具体的に $u(x,y)$ を書いてみると

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\Re e\, a_n(x+iy)^n \\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\Re e\left\{i^q a_{p+q}\frac{(p+q)\,!}{p\,!\,q\,!}\right\}x^p y^q
\end{aligned}$$

これに、$x\to z/2$, $y\to z/2i$ を入れると

$$\begin{aligned}
u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right) &= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\Re e\left\{i^q a_{p+q}\frac{(p+q)\,!}{p\,!\,q\,!}\right\}\frac{1}{i^q}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+q} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{p+q=n}^{\infty}\Re e\left\{i^q a_n\frac{n\,!}{p\,!\,q\,!}\right\}\frac{1}{i^q}\right\}\left(\frac{z}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

ここに、$\{\cdots\}$ 部分は

$$\begin{aligned}
\{\cdots\} &= \sum_{p+q=n}^{\infty}\frac{1}{2}\left\{a_n\frac{n\,!}{p\,!\,q\,!}+(-1)^q\overline{a_n}\frac{n\,!}{p\,!\,q\,!}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{a_n(1+1)^n+\overline{a_n}(1-1)^n\right\}=\frac{1}{2}\left\{2^n a_n+\delta_{n,0}\overline{a_0}\right\}
\end{aligned}$$

より

$$
\begin{aligned}
&u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\overline{a_0}\right\}\quad ,\qquad u(0,0)=\frac{1}{2}\left(a_0+\overline{a_0}\right)\\
&2u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)-u(0,0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n+\overline{a_0}-\frac{1}{2}\left(a_0+\overline{a_0}\right)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n-\frac{a_0-\overline{a_0}}{2}
\end{aligned}
$$

そこで、$z=x+iy$ を入れて実部をとると

$$
\begin{aligned}
&\Re e\left\{2u\left(\frac{x+iy}{2},\frac{x+iy}{2i}\right)-u(0,0)\right\}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\Re e\,a_n(x+iy)^n=u(x,y)
\end{aligned}
$$

∘ 次に、これが満たされれば $\Delta u=0$ となる事を示す。

$$
u(x,y)=\Re e\left\{2u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)-u(0,0)\right\}\qquad \text{with}\quad z=x+iy
$$

より

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\right]u(x,y)=4\frac{\partial^2}{\partial\bar z\partial z}\Re e\left\{2u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)\right\}\\
&=4\frac{\partial^2}{\partial\bar z\partial z}\left\{u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)+\overline{u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)}\right\}\\
&=4\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial\bar z}u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)\right\}+4\frac{\partial}{\partial\bar z}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\overline{u\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)}\right\}=0
\end{aligned}
$$

(注意) 「実函数 $f(x)$ がある時、$x\to z$ と変えて $\frac{\partial}{\partial\bar z}f(z)=0$ だから $f(z)$ は解析函数」というのはダメ。何故か？

$\frac{\partial}{\partial\bar z}f(z)$ は z に関する普通の微分の意味では定義されていない。これは

$$
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x+iy)
$$

の意味であるが

$$
\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x+iy)=f'(x+iy)-f'(x+iy)=0
$$

を示すためには $f'(x+iy)$ の存在がいる。$f'(x)$ が $f'(x+iy)$ に解析接続されるためには $f'(z)$ の解析性がいる。これは、実は ($\prime$ の意味が違うが) $f(z)$ の解析性だから、結局もとの定義に戻る。

ここでの導出は、調和函数 $u(x,y)$ が存在して、それが x と y の冪級数として具体的に与えられている事が本質的である。

(例 1)

$$u(x,y) = ax + by + c \qquad \text{with} \quad a,\ b,\ c = \text{real}$$

を考える。

$$\begin{aligned} f(z) &= 2\left[a\frac{z}{2} + b\frac{z}{2i} + c\right] - c + i\beta \\ &= (a - ib)z + c + i\beta \end{aligned}$$

$z = x + iy$ とすると

$$\begin{aligned} f(z) &= (a - ib)(x + iy) + c + i\beta \\ &= (ax + by + c) + i(-bx + ay + \beta) \end{aligned}$$

つまり

$$\Re e\, f(z) = ax + by + c = u(x,y)$$

(例 2) $f(z) = z^2$ を考える。

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

より

$$\begin{array}{ll} u(x,y) = x^2 - y^2 & \Delta u = 2 - 2 = 0 \\ v(x,y) = 2xy & \Delta v = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0,0) + i\beta \\ &= 2\left\{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(\frac{z}{2i}\right)^2\right\} + i\beta = z^2 + i\beta \qquad \text{O.K.} \end{aligned}$$

つまり、$f(z) \to f(x)$ へと制限する事は出来るが、逆は出来ない。まず、調和函数の存在を示す事が先決である。

2.7.5　調和函数展開

全 2 次元平面における Laplace 方程式

$$\Delta u = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right] u(x, y) = 0$$

の一般解 (1 価函数) を極座標表示で求める。$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ \theta = 0 \sim 2\pi$ として周期解を求める。

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \right] u(r, \theta) = 0$$

あるいは

$$\left[r\frac{\partial}{\partial r} \left(r\frac{\partial}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \right] u(r, \theta) = 0$$

そこで

$$u(r, \theta) = f(r)\,\phi(\theta) \qquad \text{with} \qquad \phi(\theta + 2\pi) = \phi(\theta)$$

として、変数分離法で求める。

$$\frac{1}{f(r)} r\frac{\partial}{\partial r} \left(r\frac{\partial}{\partial r} f(r) \right) = m^2 \quad , \qquad \frac{1}{\phi(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \phi(\theta) = -m^2$$

まず $m = 0$ の時は

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 \phi(\theta) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \phi(\theta) = \alpha\theta + \beta$$

動径部分は

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r\frac{\partial}{\partial r} f(r) \right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad r\frac{\partial}{\partial r} f(r) = \text{const}$$

$$f(r) = \text{const} \int \frac{dr}{r} = a\ \log r + b$$

より

$$u(r, \theta) = (\alpha\theta + \beta)(a\ \log r + b)$$

だが、境界条件より

$$\theta \to \theta + 2\pi \text{ で不変 } \to \alpha = 0$$

より $\beta \to 1$ として

$$u(r,\theta) = a + b\log r = \begin{cases} 1 & \text{regular solution} \\ \log r & \text{singular solution} \end{cases}$$

$m \neq 0$ の時は

$$\phi(\theta) = e^{\pm m\theta} \qquad m = 1,\ 2,\ 3, \cdots$$

また

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) f(r) = m^2 f(r)$$

より

$$f(r) = r^{\pm m} = \begin{cases} r^m & \text{regular solution} \\ \frac{1}{r^m} & \text{singular solution} \end{cases}$$

結局、1 価実調和函数の一般解は

$$\text{regular solution:} \qquad f(r,\theta) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} r^m \left(a_m e^{im\theta} + \overline{a_m} e^{-im\theta}\right)$$

$$\text{singular solution:} \quad g(r,\theta) = b_0 \log r + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{r^m} \left(b_m e^{im\theta} + \overline{b_m} e^{-im\theta}\right)$$

ここに a_0, b_0 は real。 $z = re^{i\theta}$ を使って書くと (係数の notation を多少変えて)

$$\text{regular solution:} \qquad u(z) = \Re e \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m$$

$$\text{singular solution:} \qquad u(z) = \Re e \left\{ b_0 \log z + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \left(\frac{1}{z}\right)^m \right\} \quad (b_0 = \text{real})$$

regular solution は冪級数 (整関数) の実部になっている。

2.7.6 最大値の原理、最小値の原理

「定数でない実調和函数は、定義域の内点で最大値も最小値もとらない。従って、有界閉集合 K 上での最大値、最小値は K の境界上でとる。」

(証明) 定義域の内点 z_0 の近傍で平均値の性質を持つので、十分小さい r に対して

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(z_0+re^{i\theta}\right)d\theta$$

もし $u(z_0)=M$ が、この $|z-z_0|\le r$ の円板内での最大値であるとすると

$$u\left(z_0+re^{i\theta}\right)\le M$$

等号が成り立つのは

$$u\left(z_0+re^{i\theta}\right)=M \qquad \text{for} \quad {}^\forall\theta$$

の時だけである。r はいくらでも小さくとれるから、$u(z)$ は z_0 のある近傍で一定。定義域の任意の内点についてこれがいえるから $u(z)$ は定義域内で一定。最小値の原理については、調和な実函数 $-u(z)$ に上を適用すればよい。

○ 解析函数の最大値の原理、最小値の原理は、上の調和函数のそれから導かれる。実際、解析函数 $f(z)=u+iv$ は実部、虚部ともに調和だから

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(z_0+re^{i\theta}\right)d\theta$$

が導かれる。特に、$f(z)$ が零点を持たない時は調和である $\log|f(z)|$ に上の定理を適用すればよい。$\log x$ は x が実で正の時、単調増大函数である。

2.7.7 Poisson の公式

○ 最大値・最小値の原理から

「$u(z)$ が有界閉集合 K 上で連続、K の内部で調和とすると、K の内部での $u(z)$ は K の境界上の値で一意的に決まる。」

(証明) $u_1,\, u_2$ を同じ境界値をもつ調和関数として $u=u_1-u_2$ に最大値・最小値の原理を適用すればよい。

“Dirichlet” 問題：境界値が与えられている時に u を求める問題。

ここでは、最も簡単な閉円板に対して Dirichlet 問題を考察する。

○「$u(z)$ が $|z|<r$ で調和、$|z|\le r$ で連続とする。

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(re^{i\theta}\right)\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}d\theta \qquad \text{for} \quad {}^\forall|z|<r$$

(Poisson の公式)」

(証明) まず、$u(z)$ が $|z| \le r$ で調和として、条件を緩めて証明する。$u(z)$ を $u(\eta)$ $(|\eta| \le r)$ と書き

$$\eta(\zeta) = \frac{r(r\zeta + z)}{r + \bar{z}\zeta} = \frac{r^2\zeta + rz}{\bar{z}\zeta + r}$$

により η から ζ の積分に移ると

$$\zeta \to \eta = z \ \ , \qquad |\zeta| = 1 \to |\eta| = r \text{ (証明せよ)}$$

そこで $U(\zeta) = u(\eta(\zeta))$ を考えると $U(\zeta)$ は $\zeta = 0$ を中心とする単位円で調和で、平均値の性質より

$$U(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(e^{i\theta})d\theta$$

そこで $\zeta = e^{i\theta}$ として ζ で書くと

$$u(\eta(0)) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} u(\eta(\zeta))d(\arg\zeta)$$

より、η の積分へ移ると

$$\begin{aligned}
&\zeta = \frac{r(\eta - z)}{r^2 - \bar{z}\eta} \\
&d(\arg\zeta) = -i\,\frac{d\zeta}{\zeta} = -i\,d\log\zeta \\
&= \left(\frac{\eta}{\eta - z} + \frac{\bar{z}\eta}{r^2 - \bar{z}\eta}\right)(-i)\frac{d\eta}{\eta}
\end{aligned}$$

ここで、新しく $\eta = re^{i\theta}$ とおいて、$\eta\bar{\eta} = r^2$, $(-i)d\eta/\eta = d\theta$ を使って

$$d(\arg\zeta) = \left(\frac{\eta}{\eta - z} + \frac{\bar{z}}{\bar{\eta} - \bar{z}}\right)d\theta$$

より

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\eta|=r} u(\eta)\left(\frac{\eta}{\eta - z} + \frac{\bar{z}}{\bar{\eta} - \bar{z}}\right)d(\arg\eta)$$

ここに

$$\begin{aligned}
\Re e\,\frac{\eta + z}{\eta - z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\eta + z}{\eta - z} + \frac{\bar{\eta} + \bar{z}}{\bar{\eta} - \bar{z}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\eta}{\eta - z} - 1 + \frac{2\bar{z}}{\bar{\eta} - \bar{z}} + 1\right) \\
&= \frac{\eta}{\eta - z} + \frac{\bar{z}}{\bar{\eta} - \bar{z}} = \frac{|\eta|^2 - |z|^2}{|\eta - z|^2}
\end{aligned}$$

結局

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(re^{i\theta}\right)\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(re^{i\theta}\right)\Re e\left(\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}\right)d\theta \qquad \text{for} \quad |z|<r \end{aligned}$$

特に、$u=1$ とすると

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}d\theta = 1 \qquad \text{for} \quad |z|<r$$

Poisson 核、$(r^2-|z|^2)/|re^{i\theta}-z|^2$ は $|z|=r$ の円周上では $z=re^{i\theta}$ を除いて 0、$|z|<r$ で正。θ の函数として、全密度 1 の円周上での正の測度分布密度を与える。

$z=ae^{i\varphi}$ とすると

$$\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2} = \frac{r^2-a^2}{r^2+a^2-2ar\cos(\theta-\varphi)}$$

より

$$u(ae^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(re^{i\theta}\right)\frac{r^2-a^2}{r^2+a^2-2ar\cos(\theta-\varphi)}d\theta$$

○ 次に、$u(z)$ が $|z|=r$ の円周上で調和という条件を緩める。$0<\varepsilon<1$ として $u((1-\varepsilon)z)$ に上の公式を適用すると、これは勿論 $|z|\le r$ で調和で

$$u((1-\varepsilon)z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u((1-\varepsilon)re^{i\theta})\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}d\theta$$

$u(z)$ は有限閉集合 $|z|\le r$ で一様連続だから $|u(z)|<M$ が存在して、ε についての一様収束性が言える。そこで、$\varepsilon\to 0$ と θ の積分との順序が交換出来て $\lim_{\varepsilon\to 0} u((1-\varepsilon)z) = u(z)$ ($|z|\le 1$ での連続性) より $u(z)$ の $|z|=r$ での連続性だけから Poisson の公式が成り立つ事がわかる。

○ 更に、2 番目の式を $\eta=re^{i\theta}$ で書くと、u は real だから

$$\begin{aligned} u(z) &= \Re e\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta|=r} u(\eta)\left(\frac{\eta+z}{\eta-z}\right)\frac{d\eta}{\eta}\right\} \\ &= \Re e\, f(z) \\ f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta|=r} u(\eta)\left(\frac{\eta+z}{\eta-z}\right)\frac{d\eta}{\eta} + iC \qquad (|z|<r) \end{aligned}$$

と書くと、$f(z)$ の $|z|<r$ における解析性が、積分の z に関する絶対一様収束性から従う。ここに、C は $C\in\boldsymbol{R}$ の任意定数である。$|z|<\rho<r$ として

$$\left|\frac{\eta+z}{\eta-z}\right| \le \frac{|\eta|+|z|}{|\eta|-|z|} = \frac{r+\rho}{r-\rho}$$

を使えばよい。

2.7.8 円板に対する Dirichlet 問題

○「$u(\theta)$ を原点を中心とする半径 r の円周上で定義された周期 2π を持つ実数値連続函数とする。この時、或る実函数 $f(z)$ が $|z| \leq r$ で定義され

$$\begin{aligned}&\text{開円板 } |z| < r \text{ で調和}\\&f(re^{i\theta}) = u(\theta) \qquad \text{for} \quad \theta = 0 \text{ - } 2\pi\end{aligned}$$

となる。この様な $f(z)$ は一意的に決まる。」

(注意 1) $u(\theta)$, $f(z)$ は実数値函数でも complex でもよい。complex の時は、実部と虚部に分けて考える。

(注意 2) 一意的である事は、$f_1(z)$ と $f_2(z)$ がその様な函数として、$f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ を考える事によって簡単に示せる。実際 $f(z)$ は円周上で 0 で、かつ円板内で調和だから、最大値・最小値の原理により周を含めた円板内で恒等的に 0 となる。(円周における連続性を使う。)

(証明の概要)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta)\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2}d\theta \qquad |z| < r$$

を作ると、$f(z)$ は $|z| < r$ で或る正則函数の実部として表されるから調和。そこで、円の内部から近づく時

$$f(re^{i\theta_0}) = u(\theta_0) \qquad \text{for} \quad {}^\forall\theta_0 \in [0, 2\pi]$$

を示せばよい。この代わりに、$u(\theta_0) = 0$ を仮定して $f(re^{i\theta_0}) = 0$ を示してもよい。実際、これが示されれば $u(\theta)$ として $u(\theta) - u(\theta_0)$ をとると

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\, u(\theta) - u(\theta_0) \,] \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2}d\theta = f(z) - u(\theta_0) = 0$$
$$\text{for} \quad z = re^{i\theta_0} \qquad \to \quad f(re^{i\theta_0}) = u(\theta_0)$$

が言える。更に、証明の簡単のために $r = 1$ と仮定する。一般の $0 < r$ の時は $f(z/r)$ を考えればよい。すなわち、以下の命題を示す。

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta)\frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}d\theta \qquad |z| < 1$$

で $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ に対して $u(\theta_0) = 0$ とする。z が単位円の内部から $e^{i\theta_0}$ に近づく時

$$\lim_{z \to e^{i\theta_0} \text{ with } |z| < 1} f(z) = 0$$

(証明) $z=\rho e^{i\alpha}$ $(\rho<1)$ とする。$u(\theta)$ の θ_0 における連続性より

$$^\forall\varepsilon>0 \qquad ^\exists\eta>0 \qquad \langle\langle \quad |\theta-\theta_0|<\eta \quad \text{なら} \quad |u(\theta)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \rangle\rangle$$

この η を用いて θ の積分を $|\theta-\theta_0|\geq\eta$ と $|\theta-\theta_0|<\eta$ の領域に分ける。

$$\begin{aligned} f(\rho e^{i\alpha}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\theta_0|\geq\eta}u(\theta)\frac{1-\rho^2}{|e^{i\theta}-\rho e^{i\alpha}|^2}d\theta \\ &\quad +\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\theta_0|<\eta}u(\theta)\frac{1-\rho^2}{|e^{i\theta}-\rho e^{i\alpha}|^2}d\theta \end{aligned}$$

1 番目の積分で $|\alpha-\theta_0|<\eta/2$ なら $|\theta-\theta_0|\geq\eta$ から $|\alpha-\theta|\geq\eta/2$. この時

$$\begin{aligned} &\left|e^{i\theta}-\rho e^{i\alpha}\right| = \left|(1-\rho)\cos\frac{\theta-\alpha}{2}+i(1+\rho)\sin\frac{\theta-\alpha}{2}\right| \qquad (\rho<1) \\ &\geq (1+\rho)\sin\frac{|\alpha-\theta|}{2}\geq(1+\rho)\sin\frac{\eta}{4} \end{aligned}$$

$u(\theta)$ は円周上で有界より、$|u(\theta)|<M$ (for $^\forall\theta$) とおいて

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\theta_0|\geq\eta}|u(\theta)|\frac{1-\rho^2}{|e^{i\theta}-\rho e^{i\alpha}|^2}d\theta \\ &\leq \frac{M}{2\pi}\frac{1-\rho^2}{(1+\rho)^2}\frac{1}{\left(\sin\frac{\eta}{4}\right)^2}\int_{|\theta-\theta_0|\geq\eta}d\theta\leq M\frac{1-\rho}{\left(\sin\frac{\eta}{4}\right)^2} \end{aligned}$$

そこで ρ を

$$1>\rho>1-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\left(\sin\frac{\eta}{4}\right)^2}{M}$$

ととれば、この積分は $<\varepsilon/2$ でおさえられる。

一方、2 番目の積分は

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\theta_0|<\eta}|u(\theta)|\frac{1-\rho^2}{|e^{i\theta}-\rho e^{i\alpha}|^2}d\theta\leq\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{|e^{i\theta}-\rho e^{i\alpha}|^2}d\theta=\frac{\varepsilon}{2}$$

そこで、結局

$$^\forall\varepsilon>0 \qquad ^\exists\eta>0$$

$$|\alpha-\theta_0|<\frac{\eta}{2} \quad \text{かつ} \quad 1>\rho>1-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\left(\sin\frac{\eta}{4}\right)^2}{M} \quad \text{の時} \quad \left|f(\rho e^{i\theta})\right|<\varepsilon$$

従って、$\rho<1$ で $\rho\to1,\,\alpha\to\theta_0$ へ行くと $f(e^{i\theta})$ が存在して $f(e^{i\theta})=0$。(α を θ_0 に近づける時、十分早く $\rho\to1$ に近づけてやるとよい。)

2.7.9 平均値の性質による調和函数の特徴づけ

「実連続函数 $u(z)$ が領域 D で平均値の性質を持つなら、$u(z)$ は D で調和」

(証明) D の各点で調和である事を示すため、その点のまわりの小円板をとる。この円板に対する Dirichlet 問題から、この円周上で連続、円板内で調和、円周上で $u(z)$ に一致する函数 $f(z)$ が一意的に存在する。$f(z)-u(z)$ は円周上で 0、かつ平均値の性質を持つから、最大値・最小値の原理により $f(z)-u(z)$ は円板上で恒等的に 0。つまり、$u(z)$ は円板内で調和函数 $f(z)$ に等しい。$\rightarrow$ $u(z)$ は円板内で調和。領域 D の各点についてこれが言えるから、$u(z)$ は D で調和。

2.7.10 Schwartz の鏡像原理

○「領域 D で $u(z)$ が調和、$f(z)$ が解析的なら、実軸に関し D と対称な領域 $D^* = \{\bar{z}; z \in D\}$ (D の閉集合 $\overline{D}$ と区別するために、$\overline{D}$ を避けて D^* の notation を使う) において z の函数として $u(\bar{z})$ は調和。$\overline{f(\bar{z})}$ は解析的。」

(証明) 簡単なので省略。

○ 今、実軸に対して対称な領域 $D = D^*$ を考えると、1 点以上実軸上の点 $x \in D$ が存在する。(存在しないとすると $\Im m\ z > 0$ と $\Im m\ z < 0$ の部分に分けられるので連結という条件に反する。) x は開集合の点だから、その近傍が必ず D に属する。$\rightarrow$ 実数の交点は、実は開区間 (a,b) $(a<b)$ を含む。

$f(z)$ は D で解析的で、実軸上の少なくとも 1 つの開区間の上で実数値をとると仮定する。その時

$$g(z) = f(z) - \overline{f(\bar{z})}$$

は解析的でこの区間上で 0 より、実は $D = D^*$ 全体で $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$。$f(z) = u(z) + iv(z)$ と書くと

$$\begin{aligned} &u(z) = u(\bar{z}) \ \ , \qquad v(z) = -v(\bar{z}) \\ &(\quad u(x,y) = u(x,-y) \ \ , \qquad v(x,y) = -v(x,-y) \quad \text{の意味} \quad) \end{aligned}$$

特に実軸上なら $v(x,0) = 0$

○ 実軸に対して対称な領域 $D = D^*$ に対して

$$\begin{aligned} &D^+ = D \cap \{\, \Im m\ z > 0 \,\} \\ &D^- = D \cap \{\, \Im m\ z < 0 \,\} \\ &\sigma = D \cap \{\, \Im m\ z = 0 \,\} \supset (a,b) \qquad (a<b) \\ &D = D^+ \cup \sigma \cup D^- \qquad (\text{共通部分無し}) \end{aligned}$$

と分ける。

「$f(z)$ が $D^+ \cup \sigma$ で定義された函数で

$$\begin{array}{ll} D^+ & \text{では解析的} \\ \sigma = (a, b) \quad (\text{開区間}) & \text{では実数値} \end{array}$$

とする。この時 $f(z)$ は D 全体に解析接続できて、D^- では

$$f(z) = \overline{f(\bar{z})} \qquad \text{for} \quad {}^\forall z \in D^-$$

を満たす。(Schwartz の鏡像原理)　」

(注意) もっと弱い条件
「実軸に対して対称な領域 D の上半面にある部分を D^+、D の実軸上の部分を σ とする。$v(z)$ を $D^+ \cup \sigma$ で連続、D^- で調和、σ で 0 とする。この時、$v(z)$ は D 全体での調和函数に拡張され、対称性の条件 $v(\bar{z}) = -v(z)$ を満たす。

同じ条件のもとで、v が D^+ で解析函数 $f(z)$ の虚部であれば、$f(z)$ は D 全体に解析接続され $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ を満たす。　」

(証明) 省略。(アールフォルス p. 185 参照)