

現代の物質観その 5

Modern view on the constituents of matter V.

Fujiwara Yoshikazu

2020 年 3 月 14 日

1 前回までとその後の歴史的経過、および多少の数学的準備

今回はガリレオ・ガリレイに始まりニュートンにおいて完成した力学の基本法則について学ぶ。その前に先ず、前回までに既に述べた歴史的経過を繰り返しまとめておこう。紀元前 300 年頃、アレクサンドリアで生まれたプトレマイオス、アリストテレスの天動説は、地球を中心とした惑星の運動を地球を回る円軌道とその周回円を用いて説明するものであった。(円軌道の上を回る小さい円を周回円と言う。例えば、地球が太陽の周りを回る地動説で、地球の周りを回る月の運動は近似的に周回円である。) 他の恒星は、天空にはりついて地球のまわりを回っていると考えられていた。しかし、観測精度が進むにつれて惑星の軌道に対する精度の悪さが目立ち始めた。16 世紀後半に活躍したコペルニクスは、天動説より地動説の方がもっと簡単に同じ運動を記述できるということに気付いた。同じ頃、ティコブラーエの残した莫大な観測データを、後継者ケプラーが詳細に分析し、後にニュートンによって証明された 3 つの法則 (ケプラーの 3 法則) を発見した。彼はコペルニクスの地動説に立って、火星の軌道が太陽の円軌道から少しずれて、実は太陽に焦点を持つ楕円であることを発見した。これがケプラーの第一法則である。地動説を主張してローマ教会から異端判決を受けたガリレオ・ガリレイは 1642 年に死去したが、その翌年にはニュートンが生まれた。彼は 1687 年に著作「プリンキピア」(自然哲学の数学的諸原理) を表して、基本的な力学の 3 法則を明らかにした。同時に彼は、それとそれ以前に彼自身が発見した万有引力の法則を結びつけて太陽系のモデルを完成し、ケプラーの 3 法則を導くことに成功した。これは、それまで信じられていた天体の運動と地上の物体の運動は別物であるという考え方を覆して、それらが同じ力学法則に支配されているというこ

とを主張する画期的なものであった。

ここでは力学の法則を説明するために、高校レベルの三角法と初等的な微分積分学の知識はある程度仮定する。大学の理工系学部では、初年度に線型代数と微分積分を学ぶのが普通である。これは、物理学のみならず、全ての科学分野でこれらが以後の勉学に必須であるからである。線型代数ではベクトルと内積、外積、およびベクトル空間、またベクトル間を結び付ける行列、更に固有値と固有値問題を学ぶ。微積分分野では、まず実数の定義から始まって無限級数や微分積分等の解析学の基礎を学ぶ。物理法則は一般に微分方程式とその積分形で表される。ここでは、そこまでは要求しないが、必要に応じて簡単なことだけを説明しておく。

物理におけるベクトルとスカラーの厳密な定義については後で詳しく述べるが、ここではひとまず (3 次元) ベクトル \mathbf{A} とは、(実数) 成分 A_x, A_y, A_z を持つもの $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ としておこう。その大きさを絶対値記号を用いて $A = |\mathbf{A}| (\geq 0)$ と表すと、ピタゴラスの定理から $A = |\mathbf{A}| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2}$ と表される。

線形代数のいう線型性とは本質的に比例関係である。比例関係とは $a : b = c : d$ つまり $ad = bc$ である。ここで $d = a$ として $a^2 = bc$ の時、 b と c は a を内分するという。これらは、合同・相似の概念とともにユークリッド幾何学の中でよく知られており、ガリレオ・ガリレイがその著書「天文学対話」と「新科学対話」の中で用いている論理は、ほとんど全てがこれである。関数 $f(x) = ax$ において

$$\begin{aligned} f(cx) &= cf(x) \\ f(x+y) &= f(x) + f(y) \end{aligned} \tag{1.0.1}$$

が成り立つ。ここに a や c は任意の実数 (あるいは複素数) である。ベクトル \mathbf{r} に対するベクトル関数 $f(\mathbf{r}) = a\mathbf{r}$ においても同様に

$$\begin{aligned} f(c\mathbf{r}) &= cf(\mathbf{r}) \\ f(\mathbf{r} + \mathbf{r}') &= f(\mathbf{r}) + f(\mathbf{r}') \end{aligned} \tag{1.0.2}$$

が成り立つ。 $a\mathbf{r}$ はベクトル \mathbf{r} を a 倍するということである。ベクトル \mathbf{r} の成分 x, y, z に対しても同様である。ベクトル全体の作る集合をベクトル空間という。空間という以上何らかの演算が定義されていなければならない。ベクトルの足し算、引き算、かけ算が存在するが、かけ算には普通の数のかけ算と違って、内積と外積という二通りのかけ算が存在する。内積は $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ と $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ に対して

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

で定義される。 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ は (\mathbf{A}, \mathbf{B}) とか \mathbf{AB} とも書かれる。 \mathbf{A} と \mathbf{B} の外積は、 \mathbf{A} と \mathbf{B} を含む平面に垂直なベクトル \mathbf{C} で大きさが、 \mathbf{A} と \mathbf{B} のなす角を θ として $AB \sin \theta$ の大きさのものである。これを $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ とか $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ と書く。 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ は右ネジの向きにとる。つまりベクトル \mathbf{C} の大きさを $C = |\mathbf{C}|$ と書くと、 $C = |\mathbf{C}| = AB \sin \theta$ である。一方 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$ である。内積は \mathbf{A} と \mathbf{B} の積の順序を変えても不変であるが、外積は符号を変える。つまり

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

である。 $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ と置くとベクトル \mathbf{A} の大きさは $A = |\mathbf{A}| = \sqrt{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})}$ また $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$ 。つまり、ベクトルの自分自身との外積は 0 である。この事は θ が 0 であることからわかる。 θ が直角 ($\theta = \pi/2$) の時は $\cos \theta = 0$ であるから、ベクトル \mathbf{A}, \mathbf{B} の内積が 0 となる。 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ この時 \mathbf{A} と \mathbf{B} は直交しているという。

線形性の概念は、近代数学の中で極限や微分の概念と結びついて、重要な役割を演じることとなる。「自然は連続を好む」という言葉に端的に表されているように、物理法則はその多くが滑らかな変化を持っている。(滑らかさと言う概念は、厳密には連続的微分可能性 - その関数の微分係数が連続であると言うこと - を意味する。) 粒子の運動が滑らかな時、あの時間 t における位置と微小時間 Δt 後の $t + \Delta t$ における位置とを結んだ直線は、その間の真の軌道の良い近似になっている。 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限が、その点における軌道の接線である。関数 $x(t)$ に対して

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \dot{x} \Delta t + O((\Delta t)^2)$$

である。ここに $O((\Delta t)^2)$ はオイラーの記号とあって、その大きさが $(\Delta t)^2$ のオーダーであることを示す。 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限でこの項は一項目に対して無視でき、 \dot{x} が微係数を表す。つまり

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (x(t + \Delta t) - x(t)) / \Delta t$$

これはニュートンの微分記号である。一方、ライプニッツは微分、積分を

$$dx(t)/dt \quad , \quad \int x(t) dt$$

と書いた。今ではこちらの方が一般的によく使われている。ここでは、時間で微分する時だけニュートンの微分記号を用いることにする。ニュートンは微分積分学の祖とされているが、実際には、彼はプリンキピアでは微分積分を明確には使っていない。しかし、彼がこれらを自由に操っていた事は明らかである。ベクトルの微分は、その各成分の微分として定義される。

2 座標系とベクトル

我々の住む空間は少なくとも局所的には縦、横、高さを持った3次元のユークリッド空間である。(例えば、地球表面の微小領域を考えて見よ。) 粒子の運動を記述するのに、あるところに起点をおいて、そこからある方向にある大きさを持ったベクトルを考えて、それを座標ベクトルとか位置ベクトルと言って、普通太文字で \mathbf{r} と書く。基礎になっているのは、ある原点 O とそこから3方向にのびるお互いに直交した3つの線分である。例えば、これらの線分の向きを x 軸、 y 軸、 z 軸とする。それぞれの軸の方向に単位長さのベクトルを考え、それらを x, y, z - 軸の単位ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ という。3次元直交座標系は、 $\mathcal{K} = (O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ で定義される。 x, y, z が右ネジの向きか左ネジの向きかで、右手系と左手系が存在するが、普通右手系を使う。位置ベクトル \mathbf{r} は $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ で表される。これを、 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とも書いて、 x, y, z をベクトル \mathbf{r} の成分という。この表示では $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_y = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ である。3次元直交座標は、これらの成分による表示である。表示にはこれ以外にも色々な表示がある。例えば、2次元直交座標では、動径部分 r と角度部分 θ を使った極座標がよく使われる。3次元では球座標というものが使われるが、それを指定するためには φ というもう一つの角度が必要である。円筒座標は、 $x-y$ 平面部分が極座標で、縦方向に z - 軸をとったものである。これらはいずれも1つのベクトルの異なる表示である。

図 1. 2次元直交座標、極座標

図 2. 3次元直交座標、円筒座標、3次元球座標

角度をはかるのにラジアンという単位 (実際には無次元単位) を使う。これは角度を円の弧の長さではかる単位である。半径 r の円の円周は $2\pi r$ であるから、長さ r の弧が中心から張る角度を1ラジアンと名付けると、中心のまわりの一周の角度は $2\pi r/r = 2\pi$ ラジアンである。これが 360° であるから、1ラジアンは $360/(2\pi) = 180/\pi = 57.29\dots^\circ$ である。直角 90° は、 $\pi/2$ ラジアンである。3次元立体角というのもよく用いられる。これは球の表面積が $4\pi r^2$ であるから、それを r^2 で割って 4π すなわち中心点のまわりの立体角は 4π である。2次元直交座標と極座標の関係は

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta$$

である。角度は普通、 x - 軸をゼロとして時計と反対回り (counterclockwise) にラジアンで測る。つまり、 y - 軸が $\pi/2$ で y - 軸の負方向が $-\pi/2$ である。3次元直交座標と3次元球座標の関係は

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad , \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad , \quad z = r \cos \theta$$

である。

座標系の取り方は考えている問題によって、最も便利なようにとる。例えば、運動している物体の記述には、運動を観測している座標系 (実験室系) と運動している物体に結びついた座標系 (重心系) とが考えられる。これらを K 並びに K' とすると 1 つの点の位置ベクトルが \mathbf{r} と \mathbf{r}' という風に、二通りに表される。異なる座標系間の変換を座標変換と言う。基本的な座標変換には、並進変換と回転変換がある。並進変換は座標系の原点を一定のベクトル \mathbf{a} だけずらし、回転変換は座標系の原点はそのままにして座標系を \mathcal{R} だけ回転する。この時

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a} \quad , \quad \mathbf{r} = \mathcal{R}\mathbf{r}'$$

である。 \mathcal{R} は 2×2 あるいは 3×3 (次元の) 回転行列 (直交行列) で表される。

座標系は一般には時間に依存する。しかしニュートン力学では、ある特定の時間に依存しない座標系の存在を仮定し、それを絶対静止座標系と呼ぶ。更に、時間は座標系に依存しないと考えて、それを絶対時間という。つまり、時計は全ての座標系で共通である。位置ベクトルの微分が速度ベクトル、速度ベクトルの微分が加速度ベクトルである。また、角度をラジアンで測った時の速度を角速度 ω と言う。

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = d\mathbf{r}(t)/dt$$

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = d\mathbf{v}(t)/dt$$

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) = d\theta(t)/dt$$

動く座標系としてよく使われるのは極座標系である。これは絶対静止座標系で $\mathbf{r} = (r \cos \theta, r \sin \theta) = r (\cos \theta, \sin \theta) = r \mathbf{e}_r$ として、 $\mathbf{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta)$ を動径方向の単位ベクトルとしたものである。これに直交するもう一つのベクトルは θ を $\theta + \pi/2$ に変えて $\mathbf{e}_\theta = (\cos(\theta + \pi/2), \sin(\theta + \pi/2)) = (-\sin \theta, \cos \theta)$ という θ 方向の単位ベクトルである。 \mathbf{e}_r を時間で微分すると $\dot{\mathbf{e}}_r = \mathbf{e}_\theta \dot{\theta}$ だから、極座標表示での速度ベクトルは $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$

となる。そこで、2次元極座標表示での速度ベクトルの2乗は

$$\mathbf{v}^2 = (\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2$$

となる。 \mathbf{v} をもう一度時間微分すると2次元極座標表示での加速度も同様に求められる。ここで単位ベクトルを時間微分すると、微分したベクトルは必ずもとのベクトルに直交することを指摘しておく。つまり $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$ である。

練習問題: 2次元極座標表示での加速度ベクトルを求めよ。

3 ガリレオ・ガリレイ - 慣性の法則 -

ガリレオ・ガリレイはその著書「天文学対話」と「新科学対話」の中で力の働かない物体は最初静止していれば静止を続け一定の速度で等速直線運動している物体は同じ速度で飛び続けるという、いわゆる「慣性の法則」を明確に述べたが、そこには幾つかの論点がある。まず、“力が働かない”とは空気等の抵抗力の影響も考えない極限の状況を考えるということであるが、そのような完全な環境はこの世の中には実際には存在しない。いかに真空に近い遠くの宇宙空間に行ったとしても、物体はその一番近い星から微弱な力(万有引力)を受ける。また、物体は一般には大きさを持っているが、ここでは大きさを持たず、ただ質量だけを持った点(いわゆる、質点)を考えている。このような理想化は以後の理論で度々現れるが、これは物事を簡略化して基本的な法則を確立するためには必須の作業である。また“静止”とは速度=0のことであるが、これらは位置と速度が質点の古典力学的状態であるという、ニュートンの力学法則の帰結として、実は後に導かれるものである。ガリレオ・ガリレイは緩やかな斜面を転がる球体を用いて慣性の法則を説明したが、そこでは斜面に垂直な方向と斜面に沿った運動を別々に考えることが出来るということが基本的である。これは、力とか速度とかはベクトルであるということである。数学では3つの数字を並べたものがベクトルである、 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ というが、物理ではそれだけでは不十分である。物理では、質点の位置を決める座標系と時間が基本となっていて、質点の表示はどのように座標系を選ぶかによって決まってくる。座標系の運動には並進運動と回転運動があつて、新しい座標系はそれぞれの変換によって決まる。ベクトルとは座標系の回転変換に対して座標と同じように変換する量である。我々の3次元空間では $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ で3つの成分 x, y, z と x', y', z' が 3×3 回転行列によって互いに移り変わる。座標系の回転に対して普遍的な量をスカラーと呼ぶ。例えば時間はスカラーである。質量もスカラーである。速度は座標を時間で微分したものであるから、当然ベクトルである。力もベクトルである。中学校や高校で習う平行四辺形による力の合成は、力がベクトルであることを意味している。慣性の法則でいう一定の速度とは各成分が一定の速度という意味であつて、その速度の向き(ベクトルの向き)は、その方向を変えない。それに対して速度の大きさ、すなわち速さは座標回転に対して不変であり、スカラー量である。こうした観点から言うと円運動は、速度ベクトルの向きが変わるから等速直線運動ではない。実は、中心方向の力(これを向心力と言う)を受けて、物体は落ち続けているのである。

4 ニュートンによる力学の基本 3 法則

ニュートンは著作「プリンキピア (自然原理の数学的序説)」において、コペルニクスやガリレオ、デカルト達がうすうす気づいていたものを 3 つの基本原理にまとめた。それらは

1. 慣性の法則
2. 運動の法則 (運動法則)
3. 作用反作用の法則

である。現代的な言葉では、1. は慣性系の存在を主張し、2. は $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$ を、また 3. は運動量の保存則を表している。すなわち、1. は 2.、3. の法則が成り立つような座標系が存在することを主張し、彼はそれを慣性系と名付けた。絶対静止座標系とそれに対して一定の速度で運動している座標系は、全て慣性系である。2. は力と質量の関係を示しており、力が決まれば質量が定義出来るということが分かる。バネの力などはバネの伸び縮みにより測定出来るので比較的わかりやすいが、質量の定義は「その物体に固有な量」とニュートン自身その定義に困ったようである。MKS 単位では質量は Kg、加速度は m/s^2 より力の単位は Kg m/s^2 である。これを N (ニュートン) という。つまり、

$$1 \text{ N} = 1 \text{ Kg m/s}^2$$

である。同様に、cgs 単位では 1 dyn (dyne: ダイン) は

$$1 \text{ dyn} = 1 \text{ g cm/s}^2$$

が力の単位である。3. は 2 つの物体 A と B からなる系を考えた時に、 A が力 \mathbf{f} を B に及ぼす時には、必ず B は A に大きさは等しく、反対向きの力 $-\mathbf{f}$ を及ぼすということである。そこで、 A と B の全体系を考えると働く力は 0 であるので、慣性の法則が成り立ち、 A と B の重心ははじめ静止していれば静止し続け、一定の速度で等速直線運動をしていけば、そのまま等速運動を続ける。 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ を運動量というが、2. は $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}$ と書けるので、ここでも A の運動方程式は $\dot{\mathbf{p}}_A = \mathbf{f}$, B の運動方程式は $\dot{\mathbf{p}}_B = -\mathbf{f}$ より、二式を加えると $d(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B)/dt = 0$ 。つまり、系全体の全運動量 $\mathbf{P} = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B$ が保存される事を表している。この事は、全体としては力が働いていない全系に対しても、力学の 3 法則が成り立っていると言う事を表している。

4.1 等加速度運動

以下、簡単のため当分 1 次元運動を考える。時間に依存しない一定の加速度ベクトル a を持つ物体の運動を等加速度運動と言う。この時、物体の位置と速度は

$$x(t) = (1/2)at^2 + v_0t + x_0$$

$$v(t) = dx(t)/dt = at + v_0$$

$$a(t) = dv(t)/dt = a$$

で与えられる。ここに v_0 と x_0 は $t = 0$ における速度と位置であって初期条件と呼ばれる。

加速度 $a(t)$ は位置 $x(t)$ の 2 回導関数であるから運動方程式は一般に 2 回の微分方程式となる。それを積分していく時に 2 つ未定定数が現れる。それが初期位置と初期速度である。力 f は一般には位置、速度、時間の関数である。 $f = f(x, v, t)$.

日常生活では重さはしばしば質量の意味で使われるが、本当は重さは力であり、それを重力 W という。質量を m として $W = mg$ と書き、 g を重力加速度という。 g は地球表面の場所により多少違いがあるが、およそ $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ である。一番簡単な等加速度運動は自由落下運動であり、これは上の式で a を g と書いて表される。次に簡単な例は放物運動である。これは 2 次元運動であり横軸方向には力が働かない等速自由運動として記述される。縦方向と横方向の位置を示す式から時間 t を消去すると、放物線の軌跡が得られる。

図 3. 放物運動

さらに斜面を転がる球の運動や振り子の運動も (近似的に) この範疇で取り扱うことが出来る。

4.2 等速円運動

前節の場合と同様ここでも先ず等速円運動を行う物体の位置を表す式から始めよう。等速円運動は平面内の運動であるので、 $x - y$ 平面で表すのが便利である。円の半径を r 、角速度を ω とすると、

$$x(t) = r \cos \omega t$$

$$y(t) = r \sin \omega t$$

で表される。ここに ω は時間に依存しない定数である。速度ベクトルはその成分が

$$v_x(t) = -r\omega \sin \omega t$$

$$v_y(t) = r\omega \cos \omega t$$

で表される。その大きさは $v = r\omega$ である。

加速度ベクトルはその成分が

$$a_x(t) = -r\omega^2 \cos \omega t$$

$$a_y(t) = -r\omega^2 \sin \omega t$$

である。すなわち、加速度ベクトルの大きさは $a = r\omega^2$ で、その向きは座標ベクトルと逆方向で円の中心の向きである。これを向心加速度という。これに質量 m をかけたものが向心力である。 a は ω や $v = r\omega$ を使って

$$a = r\omega^2 = v^2/r$$

とも表される。具体的に向心力を与えて円軌道を求めるには、2次元ベクトルの微分方程式を解く必要がある。しかしながら、結果は単純な円運動ではなく、楕円等の二次曲線の軌道となる。詳しくは文献を参照してほしい。(例えば、拙書「力学」講義ノート)

4.3 月の運動

ニュートンは距離 r だけ隔てた質量 m_1 と m_2 の間には万有引力

$$F = Gm_1m_2/r^2$$

の力が働くとした。例えば、月と地球の間には

$F = GMm/r^2$ の力が働く。ここに、 M は地球の質量、 m は月の質量、 r は月と地球の間の距離である。また、 G は万有引力定数といわれ、その数値は文献に記されている。ここでは、簡単のため月と地球は2つの質点と考え、月は地球のまわりを等速円運動をしていると仮定する。ニュートンは地球表面にある質量 m_0 の物体にも地球との間に万有引力が働き、それが重力の原因であると考えた。すなわち、地球の半径を R として

$$m_0g = GMm_0/R^2$$

が成り立つ。そこで、 $GM = gR^2$ である。ここに、 g は重力加速度 $g = 9.8\text{m/s}^2$ である。月の運動方程式は前節から

$$mv^2/r = GMm/r^2$$

であるから、 $v^2 = GM/r = gR^2/r$

そこで、月の周期 T は

$$T = 2\pi r/v = 2\pi r\sqrt{r/gR^2} = 2\pi(r/R)\sqrt{(r/R)R/g}$$

である。月と地球の距離 r は地球の直径 $2R$ のおよそ 30 倍であるので $r/R = 30 \times 2 = 60$ かつ $R = 6,400\text{km} = 6.4 \times 10^6\text{m}$ を代入すると

$$T = 2\pi \times 60 \times \sqrt{60 \times 6.4 \times 10^6 / 9.8\text{sec}} = 2\pi \times 60 \times 60 \times 10^2 \sqrt{(64/60)/0.98\text{sec}} =$$

$$\pi \times 100/12 \times \sqrt{(64/60)/0.98} \text{day} = 27.3 \text{ 日}$$

となつて、ひと月 ~ 30 日 と大体一致する。実際には、月が地球のまわりを公転する間に地球も太陽のまわりを 1 年かけて公転しているので、1 月につき約 30° だけさらに進まないといふ満月から満月までの日数にはならない。そこで、

$$27.3 \times (1 + 30/360) = 29.5 \text{ 日}$$

となる。これを 1 朔望月という。上の周期 T の式を 2 乗すると、

$$T^2 = (2\pi)^2 / gR^2 r^3$$

つまり、周期 T の 2 乗は円の半径 r の 3 乗に比例する。これは、ケプラーの第 3 法則の特別の場合である。実際には、ケプラーは惑星の楕円軌道を議論したので、「惑星の周期 T の 2 乗は、楕円の長軸 a の 3 乗に比例する」がケプラーの第 3 法則である。ケプラーの第 2 法則は後で示す角運動量の保存則であつて、今の場合は

$$mr^2\omega = (\text{時間に依存せず}) \text{ 一定}$$

という trivial な関係式となる。

練習問題: 赤道の上空で地球の自転と同じ周期で回っている人工衛星を静止衛星と言う。静止衛星を打ち上げるには、地球表面から何 km 上空を回るように打ち上げれば良いか?

4.4 各種保存則

上の運動方程式から、ベクトル空間における積分操作により種々の物理量の保存則が導かれる。そこで、保存則は運動方程式の積分形と言われる。先ず、エネルギー保存則は、仕事の概念と関係していて、2 つのベクトル量の内積を取ることで導かれる。ある物体に力 \mathbf{F} が働いて物体の位置が $\Delta \mathbf{r}$ だけ移動したとすると、物体は $\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$ だけ仕事をされたといふ。全体の仕事量は、これを物体の移動経路に沿って和をとつて $W = \sum \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = \sum \mathbf{F} \cdot (\Delta \cdot \mathbf{r} / \Delta t) \Delta t$ となる。 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で、 $(\Delta \mathbf{r} / \Delta t)$ は速度ベクトル \mathbf{v} となるので、上の式は極限で

$$W = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt$$

となる。ここに積分は物体の運動の軌跡に沿つてとる、いわゆる線積分である。例えば、自由落下運動では、上向きに z - 軸をとると、1 次元運動として運動方程式は $mdv/dt = -mg$ となるから、これに v をかけて t で積分すると

$$\int d(1/2mv^2)/dt dt = - \int mgv dt$$

となる。 $v = dz/dt$ より、これは $1/2 mv^2 = -mgz + \text{const}$ となる。ここに、const は

不定積分に現れる積分定数である。これを E と書いてエネルギーと呼ぶと

$$E = 1/2mv^2 + mgz$$

である。これは右辺 1 項目の運動エネルギー $1/2 mv^2$ と位置エネルギー mgz の和は時間によらず一定であることを示している。これを (力学的) エネルギー保存則という。(力学的) というのは、後ほど熱エネルギーも加えて全エネルギーが保存していることを示すためである。つまり、仕事とエネルギーは本質的に同じもので、その単位は

$$1 \text{ J (ジュール)} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ Kg m}^2/\text{s}^2 \text{ (MKS 単位)}$$

$$1 \text{ erg (エルグ)} = 1 \text{ dyn cm} = 1 \text{ g cm}^2/\text{s}^2 \text{ (cgs 単位)}$$

である。仕事とエネルギーは本質的に同じものであるが、もし力のした仕事が運動の始点と終点だけにより途中の経路によらない場合、そのような力を保存力という。現実的な 3 次元運動に対しては保存力の概念は特に重要である。保存力においては、位置エネルギーはポテンシャルで表される。保存力において、物体のされた仕事 $-W$ をポテンシャルと言って $U(\mathbf{r})$ で表す。

$$-W = U(\mathbf{r}) = - \int \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

ここに、積分は運動の始点 \mathbf{r}_0 と終点 \mathbf{r} だけにより途中の経路によらないとする。この逆の演算はベクトル成分の偏微分であり、それを grad (グレイディエント) と言う。すなわち

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = - \text{grad}U(\mathbf{r})$$

3次元では、これは

$$(\mathbf{f}_x(\mathbf{r}), \mathbf{f}_y(\mathbf{r}), \mathbf{f}_z(\mathbf{r})) = (-\partial U(\mathbf{r})/\partial x, -\partial U(\mathbf{r})/\partial y, -\partial U(\mathbf{r})/\partial z)$$

である。グレイディエントとは「傾き」の意味である。

等速円運動の場合には、万有引力は円の中心方向を向き速度ベクトルは円の接線方向を向いているので、それらの内積はゼロである。従って、上と同じ議論をすると $(1/2)mv^2 =$ 一定、つまり速度の大きさが一定というはじめの仮定に戻ることになる。実際には極座標系での速度は、一般には動径方向に速度成分 \dot{r} を持っており、これを中心方向を向いた万有引力に掛けて時間で積分すると位置エネルギー部分 U は

$$U = \int (GMm/r^2)(dr/dt)dt = GMm \int (1/r^2)dr = -GMm/r$$

これを万有引力ポテンシャルと言う。万有引力ポテンシャルは保存力である。そこで一般のエネルギー保存側は $T = (1/2)mv^2$ を運動エネルギーとして

$$E = T + U = (1/2)mv^2 - GMm/r$$

となる。2次元極座標では $v^2 = (\dot{r})^2 + (r \cdot \dot{\theta})^2$ である。

角運動量保存則は座標 \mathbf{r} と運動量 \mathbf{p} の外積に関係している。運動方程式 $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}$ を使うと、角運動量 $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ の微分は

$$d\mathbf{M}/dt = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \mathbf{f}$$

となる。そこで、右辺1項目は、 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ より 0 だから、 $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$ を力のモーメント (またはトルクともいう) とすると

$$d\mathbf{M}/dt = \mathbf{N}$$

となる。これは、角運動量の運動方程式である。特に、中心力 (力の向きが座標の中心を向いている力を中心力という) の場合は $\mathbf{N} = 0$ だから、角運動量 \mathbf{M} は保存されることになる。ベクトル \mathbf{M} の向きは座標 \mathbf{r} と速度ベクトル \mathbf{v} に垂直だから、 \mathbf{r} と \mathbf{v} の作る運動平面に垂直である。そこで中心力による運動は必ず一定平面内で起きることとなる。太陽系の惑星の運動が同じ向きでほぼ一平面内にあるのは、太陽系が出来た時に全角運動量がそれぞれの惑星に分散されたためであると考えられる。