現代の物質観その 10
Modern view on the constituents of matter X.
近代物理学-2: 相対論的微視の世界の力学法則
- 場の量子論 -

Fujiwara Yoshikazu

2024 年 10 月 20 日

目次

1 Dirac 粒子

1.1 双スピノールとローレンツ変換

以前「スピン角運動量」のところで 、実 3-次元空間におけるスピン 1/2 を持つ 2-成分波動函数が 2-次元スピノールとして表されることを学んだが、これを時間軸を含んだ相対論的 4-次元ミンコフスキー空間に拡張して 4-次元スピノールを導入する。これにより、3-次元実ベクトルの空間回転以外に 4-元実ベクトルのローレンツ変換を取り扱えるようになる。まず、以前の結果を振り返ってみよう。 2-次元スピノール ξ^{α} $(\alpha = 1, 2)$ は空間回転に対して (**??**) の様に変換される。ここでは、これを $U \to A$ と変えて

$$\psi' = \begin{pmatrix} (\psi')^1 \\ (\psi')^2 \end{pmatrix} = A\psi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \tag{1.1.1}$$

と書く。ここに

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \tag{1.1.2}$$

は空間回転以外にローレンツ変換をも含むことができる様に unimodular 性 det $A = \alpha\delta - \beta\gamma = 1$ だけを要請する。(数学の言葉では $A \in SL(2, \boldsymbol{C})$) det $A = 1$ の時のローレンツ変換を、特に固有ローレンツ変換という。ここでは、単にローレンツ変換と言えば固有ローレンツ変換を指すものとする。あとで、A は空間回転に対しては unitary $AA^{\dagger} = A^{\dagger}A = 1$、ローレンツ変換に対しては hermite $A^{\dagger} = A$ であることが分かる。ここに $A^{\dagger} = {}^tA^*$ である。

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = (\alpha\delta - \beta\gamma) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

より det A=1 に対して

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{for det } A = 1 \tag{1.1.4}$$

である。上付きの添え字のスピノール $\xi = (\xi^{\alpha})$ 以外に下付きのスピノール ξ_{α} を

$$\xi_{\alpha} = C_{\alpha\beta}\xi^{\beta} = (C\xi)_{\alpha} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \right)_{\alpha} = \begin{pmatrix} \xi^2 \\ -\xi^1 \end{pmatrix}_{\alpha} \tag{1.1.5}$$

によって定義する。つまり $(\xi_{\alpha}) = C\xi$. ここに C は (**??**) の g と同じものである。すなわち

$$(C_{\alpha,\beta}) = (C^{\alpha,\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2 \tag{1.1.6}$$

は次の性質を満たす。$C=-{}^tC=-C^{-1}$. また $(\xi_\alpha)=C\xi$ の逆変換は $\xi=C^{-1}(\xi_\alpha)=({}^tC)(\xi_\alpha)$. つまり

$$\xi^\alpha=({}^tC)^{\alpha,\beta}\xi_\beta=C^{\beta,\alpha}\xi_\beta \tag{1.1.7}$$

である。これは (??) と同じ結果である。 $C^{\alpha,\beta}=C_{\beta,\alpha}$ をこのルールに従って変換すると

$$\begin{aligned}
C^\alpha{}_\beta &= C_{\beta,\beta'}C^{\alpha,\beta'}=C^{\alpha,\beta'}C_{\beta,\beta'}=C^{\alpha,\beta'}({}^tC)_{\beta',\beta}\\
&=(C^tC)^\alpha{}_\beta=\delta^\alpha{}_\beta\\
C_\alpha{}^\beta &= C_{\alpha,\beta'}C^{\beta',\beta}=(C^2)_\alpha{}^\beta=-\delta_\alpha{}^\beta
\end{aligned} \tag{1.1.8}$$

つまり $C^\alpha{}_\beta=-C_\alpha{}^\beta=\delta^\alpha_\beta=$ 単位行列 となる。(上下の添え字を入れ替えると、符号が変わることに注意！) 下付きの添え字を持つスピノール (ξ_α) に対しては (1.1.1) の変換は $(\xi'_\alpha)=C\xi'=CA\xi=CA({}^tC)(\xi_\alpha)$ より $CA({}^tC)=CAC^{-1}$ である。ここに

$$\begin{aligned}
CA({}^tC) &= \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\delta & -\gamma\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}={}^t(A^{-1})=({}^tA)^{-1}
\end{aligned} \tag{1.1.9}$$

である。空間回転においては $A=$ unnitary よりこれは A^* となる。従ってこの時は $(\xi'_\alpha)=A^*(\xi_\alpha)$ となる。 (1.1.4) を用いると、A の unitary 条件 $A^\dagger=A^{-1}$ から $\delta=\alpha^*,\gamma=-\beta^*$ が分かる。そこで unimodular 条件 $\det A=\alpha\delta-\beta\gamma=|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ はただ一つの条件を与えるから、$(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ の 8 つの実パラメータのうち $8-(2+2+1)=3$ つだけが独立である。これらは空間回転の 3 つのオイラー角や 3 つの 2-次元平面の垂直軸周りの 3 つの回転角の自由度に対応する。

二つのスピン 1/2 の粒子の 2-次元スピノールの積 $\xi^\alpha\eta^\beta$ は 4-成分あるが、それは全スピン作用素による変換に対しては可約である。適当な線形結合を取ることにより 3 次元のスピン 1 の空間と 1 次元のスピン 0 の空間の直和に分解することができる。これをスピン 1 の空間とスピン 0 の空間への既約分解という。一般に 2-次元スピノールからなる多粒子空間は、粒子の対称性だけを考慮することによって全ての既約表現を実現することができる。これを $SU(2,\boldsymbol{C})$ 群の既約表現という。一方、角運動量函数の合成により既約表現に分解する方法が「スピン角運動量」のところで導入した Clebsch-Gordan 係数によって与えられている。今の場合

$$\begin{aligned}
\langle 1/2\ 1/2\ 1/2\ 1/2|1,1\rangle &= \langle 1/2\ -1/2\ 1/2\ -1/2|1,-1\rangle = 1\\
\langle 1/2\ 1/2\ 1/2\ -1/2|1,0\rangle &= \langle 1/2\ -1/2\ 1/2\ 1/2|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\\
\langle 1/2\ 1/2\ 1/2\ -1/2|0,0\rangle &= -\langle 1/2\ -1/2\ 1/2\ 1/2|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{1.1.10}$$

があれば充分である。これらを使って、スピン 1 のスピン函数 $\zeta_{1,\mu}$ とスピン 0 のスピン函数 $\zeta_{0,0}$ は

$$
\begin{aligned}
\zeta_{1,1} &= \langle 1/2\ 1/2\ 1/2\ 1/2|1,1\rangle \xi^1\eta^1 = \xi^1\eta^1 \\
\zeta_{1,0} &= \langle 1/2\ 1/2\ 1/2\ -1/2|1,0\rangle \xi^1\eta^2 + \langle 1/2\ -1/2\ 1/2\ 1/2|1,0\rangle \xi^2\eta^1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi^1\eta^2 + \xi^2\eta^1\right) \\
\zeta_{1,-1} &= \langle 1/2\ -1/2\ 1/2\ -1/2|1,-1\rangle \xi^2\eta^2 = \xi^2\eta^2 \\
\zeta_{0,0} &= \langle 1/2\ 1/2\ 1/2\ -1/2|0,0\rangle \xi^1\eta^2 + \langle 1/2\ -1/2\ 1/2\ 1/2|0,0\rangle \xi^2\eta^1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1\right)
\end{aligned}
\tag{1.1.11}
$$

と表わされる。ここから明らかに、スピン 1 函数は対称スピノールスピン 0 函数は反対称スピノールから作られることが分かる。 2-階の 2-次元スピノール $\zeta^{\alpha,\beta}$ を、その変換性に従って $\zeta^{\alpha,\beta} \sim \xi^\alpha\eta^\beta$ によって導入しよう。 (1.1.11) の結果は

$$
\begin{aligned}
\zeta_{1,1} &= \zeta^{1,1} \\
\zeta_{1,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\zeta^{1,2} + \zeta^{2,1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\zeta^1{}_1 - \zeta^2{}_2\right) \\
\zeta_{1,-1} &= \zeta^{2,2} \\
\zeta_{0,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\zeta^{1,2} - \zeta^{2,1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\zeta^1{}_1 + \zeta^2{}_2\right)
\end{aligned}
\tag{1.1.12}
$$

と表わされる。(1.1.1) の変換行列 A の unimodular 性の要請は、スピン 0 波動函数 $\zeta_{0,0}$ がこの変換に対して変化しないということに基づいている。更に、空間回転に対しては下付きの添え字を持つスピノールは A^* に従って変換されることを考えると、(ξ_α) は ξ^* の様に振る舞うことが分かる。そこで同じ種類のスピノール ψ^α の合成を考えると $\zeta_{0,0}$ は

$$
\zeta_{0,0} \sim \psi^1(\psi^1)^* + \psi^2(\psi^2)^* = |\psi^1|^2 + |\psi^2|^2 \tag{1.1.13}
$$

つまりスピン 1/2 の粒子の存在確率の様に振る舞うことが分かる。

時間軸の回転を含むローレンツ変換に対しては、この様な解釈は不可能である。実際特殊相対論のところで見た様に、$\rho = |\psi|^2$ は 4-元カレント j^μ の時間成分であって相対論的不変量ではない。これに伴って 2-次元スピノールだけでは 4-元量を表わす事はできない。そこで我々は新しく別の種類の 2-次元スピノールを導入し、それが変換 (1.1.1) の複素共役の様に変換するとする。つまり $(\psi')^* = A^*\psi^*$ より $\psi^* = (\psi^\alpha)^*$ の様に振る舞うスピノールを添え字 α の上に dot をつけて $(\psi^{\dot\alpha})$ と表わすことにする。これを $\eta = (\eta^{\dot\alpha})$ と

書くと

$$\eta' = \begin{pmatrix} (\eta')^{\dot{1}} \\ (\eta')^{\dot{2}} \end{pmatrix} = A^*\eta = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^{\dot{1}} \\ \eta^{\dot{2}} \end{pmatrix} \tag{1.1.14}$$

となる。 dot 付きの添え字の上げ下げは、dot のない場合と同じに取る。そこで $(\eta_{\dot{\alpha}})$ に対する変換 (1.1.1) の効果は $CA^*({}^tC) = (A^\dagger)^{-1}$ となる。空間回転に対しては $A^\dagger = A^{-1}$ だから、これは A に戻る。すなわち、dot が付かない場合と上下が逆である。二種類のスピノールの対 $(\xi^\alpha, \eta^{\dot{\beta}})$、あるいはそれらと同じ様に変換する量 $\zeta^{\alpha\dot{\beta}} \sim (\xi^\alpha, \eta^{\dot{\beta}})$ を双スピノール (bi-spinor) という。これを 2× 2 matrix 表示して $\zeta = (\zeta^{\alpha\dot{\beta}})$ と書く。その成分は 2× 2=4 個あり 4-元ベクトルを記述することができる。特に $x^\mu = (x^0, x^k) = (x^0, \boldsymbol{x})$ を記述する ζ を $X = (X^{\alpha\dot{\beta}})$ と 2× 2 matrix のかたちに書き、これを 4-成分 Pauli matrix $(\sigma_\mu) = (\sigma^0, \boldsymbol{\sigma})$ を用いて展開する。ここに $\sigma^0 = \sigma_0$ は 2× 2 単位行列である。つまり

$$X = \sigma_\mu x^\mu = x^0\sigma_0 + (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \tag{1.1.15}$$

である。実ベクトル (x^μ) に対して $X = X^\dagger$ は hermite であり、det $X = (x^0)^2 - \boldsymbol{x}^2 = x^\mu x_\mu = x^2$ が不変量である。 X から x^μ への逆変換は Spur の公式

$$\mathrm{Sp}\{\sigma_\mu\sigma_\nu\} = \delta_{\mu,\nu} \tag{1.1.16}$$

を用いて

$$x^\mu = \mathrm{Sp}\{\sigma_\mu X\} \tag{1.1.17}$$

により行うことができる。(1.1.15) を $(X^\alpha\dot{\beta})$ と等しいとおくことにより

$$\begin{aligned} X^{1\dot{1}} &= X_{2\dot{2}} = x^0 + x^3 \\ X^{2\dot{2}} &= X_{1\dot{1}} = x^0 - x^3 \\ X^{1\dot{2}} &= -X_{2\dot{1}} = x^1 - ix^2 \\ X^{2\dot{1}} &= -X_{1\dot{2}} = x^1 + ix^2 \end{aligned} \tag{1.1.18}$$

が分かる。(1.1.16) は $\sigma_i\sigma_j = \delta_{i,j} + ie_{i,j,k}\sigma_k$ により簡単に導ける。 Spur (あるいは trace) は正方行列の対角成分を全て足し上げたものである。 $A, B, \cdots$ を n × n matrix として、Sp $A = \sum_{k=1}^n A_{k,k}$. Sp ${}^tA =$ Sp A, Sp $\{AB\} =$ Sp $\{BA\}$. また Sp $\{ABC\cdots\}$ で $A, B, C, \cdots$ を cyclic に回しても不変。また transepose を取ることにより、順番を逆向きに入れ替えることも可能である。例えば Sp $ABCD =$ Sp ${}^t(ABCD) =$ Sp $({}^tD^t(ABC)) = \cdots =$ Sp $\{{}^tD^tC^tB^tA\}$. 。ここから Sp $(ABCD)^* = \mathrm{Sp}(D^\dagger C^\dagger B^\dagger A^\dagger)$ も分かる。

(1.1.1) のスピノールの変換を双スピノール X に適用すると $(X')^{\alpha,\dot{\beta}} = A^{\alpha}{}_{\alpha'}A^{*\beta}{}_{\beta'}X^{\alpha',\dot{\beta}'} = (AXA^{\dagger})^{\alpha,\dot{\beta}}$ より $X' = AXA^{\dagger}$ と変換される。そこで、実 4-元ベクトル x^{μ} の変換を $(x')^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$ とすると

$$\begin{aligned}(x')^{\mu} &= \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{\sigma_{\mu}X'\} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{\sigma_{\mu}AXA^{\dagger}\}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{\sigma_{\mu}A\sigma_{\nu}A^{\dagger}\}\ x^{\mu}\end{aligned} \tag{1.1.19}$$

より

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{\sigma_{\mu}A\sigma_{\nu}A^{\dagger}\} \tag{1.1.20}$$

が分かる。ここから Spur の公式を用いると

$$\begin{aligned}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}{}^{*} &= \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{(\sigma_{\mu}A\sigma_{\nu}A^{\dagger})^{*}\}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{A\sigma_{\nu}A^{\dagger}\sigma_{\mu}\} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{\sigma_{\mu}A\sigma_{\nu}A^{\dagger}\}\\ &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \mathrm{real}\end{aligned} \tag{1.1.21}$$

が分かる。また、$\Lambda^{0}{}_{0} = \mathrm{Sp}\{AA^{\dagger}\} > 1$ ならば、固有ローレンツ変換は時間軸成分の符号を変えない。

(注意) ここで定義した $(x')^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$ の $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}x$ と特殊相対論のところで定義した (**??**) の $a^{\mu}{}_{\nu}$ とでは、プライムのつき方が逆である。つまり、互いに逆変換になっている。これは、$x^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu}(x')^{\nu}$ と書いて $\mathcal{K}'$ 系を運動する物体の静止系にとって $\mathcal{K}$ を実験室系に取る方が、実際の応用上便利な為である。しかし、理論的にはここでの様にローレンツ変換を $\mathcal{K}$ 系から $\mathcal{K}'$ 系への波動函数の変換として定義する方が自然である。ここからは、この定義を採用する。

次に下付きの添え字の双スピノールを定義するために

$$\tilde{\sigma}_{\mu} = (\sigma_0, -\boldsymbol{\sigma}) \tag{1.1.22}$$

を定義する。この $\tilde{\sigma}_{\mu}$ に対して

$$\mathrm{Sp}\{\tilde{\sigma}_{\mu}\sigma_{\nu}\} = g_{\mu,\nu} \tag{1.1.23}$$

が成り立つ。そこで

$$\mathrm{Sp}\{X\tilde{Y}\} = \mathrm{Sp}\{\sigma_{\mu}\tilde{\sigma}_{\nu}\}x^{m}uy^{\nu} = g_{\mu,\nu}x^{\mu}y^{\nu} = x^{\mu}y_{\nu} \tag{1.1.24}$$

これは不変量だから

$$\mathrm{Sp}\{X'\tilde{Y}'\} = \mathrm{Sp}\{X\tilde{Y}\} \tag{1.1.25}$$

が成り立つ。また

$$C\tilde{\sigma}_\mu C^{-1} = {}^t\sigma_\mu = (\sigma_\mu)^* \tag{1.1.26}$$

実際 $C = i\sigma_2$ を使うと、左辺$=\sigma_2(\sigma_0, -\boldsymbol{\sigma})\sigma_2 = (\sigma_0, \sigma_1, -\sigma_2, \sigma_3) = {}^t\sigma_\mu = (\sigma_\mu)^*$ が得られる。更に $\tilde{X}$ を

$$\tilde{X} = \tilde{\sigma}_\mu x^\mu = x^0\sigma_0 - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -(x^1 - ix^2) \\ -(x^1 + ix^2) & x^0 + x^3 \end{pmatrix} = \sigma_\mu x_\mu \tag{1.1.27}$$

と定義する。$\tilde{X}$ は、実 4-元ベクトル $x = (x^\mu)$ に対して下付きの添え字を持った双スピノール $(X^*_{\alpha\dot{\beta}})$ の様に振る舞う。すなわち、(1.1.27) を $(\tilde{X}_{\alpha\dot{\beta}})$ (下付きの添え字に注意！) と等しいとおくことにより (1.1.18) と比較して

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{1\dot{1}} &= X_{1\dot{1}}{}^* = x^0 - x^3 \\
\tilde{X}_{2\dot{2}} &= X_{2\dot{2}}{}^* = x^0 + x^3 \\
\tilde{X}_{1\dot{2}} &= X_{1\dot{2}}{}^* = -(x^1 - ix^2) \\
\tilde{X}^{2\dot{1}} &= X_{2\dot{1}}{}^* = -(x^1 + ix^2)
\end{aligned} \tag{1.1.28}$$

が分かる。つまり $\tilde{X}_{\alpha\dot{\beta}} = X_{\alpha\dot{\beta}}{}^*$ である。ここから $(X_{\alpha,\dot{\beta}}) = CXC^{-1}$ より $\tilde{X} = CX^*C^{-1}$ が分かる。この式はまた (1.1.26) から実 4-元ベクトル x^μ に対して $C\tilde{X}C^{-1} = C\tilde{\sigma}_\mu C^{-1}x^\mu = \sigma_\mu{}^* x^\mu = X^*$ としても得られる。更に、左右から C と C^{-1} を掛けて $C^2 = -1$ より $\tilde{X} = CX^*C^{-1}$ が得られる。更に $\tilde{X}_{\alpha\dot{\beta}} = X_{\alpha\dot{\beta}}{}^*$ を matrix 表示すると、X や $\tilde{X}$ が hermeite である事により

$$\begin{aligned}
\tilde{X} &= (\tilde{X}_{\alpha\dot{\beta}}) = (X_{\alpha\dot{\beta}})^* = {}^t(X_{\alpha\dot{\beta}}) = (X_{\dot{\beta}\alpha}) \\
{}^t\tilde{X} &= (X_{\alpha\dot{\beta}})
\end{aligned} \tag{1.1.29}$$

これらを使って

$$X^{\alpha\dot{\beta}}X_{\dot{\beta}\alpha'} = X^{\alpha\dot{\beta}}X_{\alpha'\dot{\beta}} = x^2\delta^\alpha{}_{\alpha'} \tag{1.1.30}$$

が示せる。実際

$$\begin{aligned}
&X^{\alpha\dot{\beta}}X_{\dot{\beta}\alpha'} = (X(X_{\dot{\beta}\alpha}))^\alpha{}_{\alpha'} = (X\tilde{X})^\alpha{}_{\alpha'} \\
&= (x^2)^\alpha{}_{\alpha'} = x^2\delta^\alpha{}_{\alpha'}
\end{aligned} \tag{1.1.31}$$

また (1.1.30) の 2 番目の式は、dot 付きの添え字と無しの添え字は無関係の自由度なので順番に関係なく $X_{\dot{\beta}\alpha'} = X_{\alpha'\dot{\beta}}$ であることから明らかであるが、(1.1.29) の最後の使って次の様にしても証明出来る。

$$\begin{aligned} & X^{\alpha\dot{\beta}} X_{\alpha'\dot{\beta}} = X^{\alpha\dot{\beta}} ({}^t\tilde{X})_{\alpha'\dot{\beta}} = X^{\alpha\dot{\beta}} (\tilde{X})_{\dot{\beta}\alpha'} \\ & = (X\tilde{X})^{\alpha}{}_{\alpha'} = x^2 \delta^{\alpha}{}_{\alpha'} \end{aligned} \tag{1.1.32}$$

また (1.1.18) を使っても直接示すことができる。

(注意) matrix element としては $X_{\dot{\beta}\alpha'} = X_{\alpha'\dot{\beta}}$ であるが、2 × 2 matrix としては $(X_{\dot{\beta}\alpha'}) = (X_{\alpha'\dot{\beta}})$ ではない！ (1, 2) 成分と (2, 1) 成分がひっくり返る。

次に $\tilde{X}$ の座標変換は $X' = AXA^\dagger$ と $CAC^{-1} = {}^tA^{-1}$ より

$$\begin{aligned} \tilde{X}' &= CX'^* C^{-1} = C(AXA^\dagger)^* C^{-1} = CA^* C^{-1} CX^* C^{-1} CA^{\dagger *} C^{-1} \\ &= (A^\dagger)^{-1} \tilde{X} A^{-1} \end{aligned} \tag{1.1.33}$$

が得られる。つまり $\tilde{X}$ は $A \to (A^\dagger)^{-1}$ の様に変換する。ここから (1.1.25) が直接証明できる。また下付きの 4-元ベクトルの座標変換に対して

$$\begin{aligned} x'_\mu &= \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{\tilde{\sigma}_\mu X'\} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{\sigma_\mu \tilde{X}'\} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{\sigma_\mu (A^\dagger)^{-1} \tilde{X} A^{-1}\} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{\sigma_\mu (A^\dagger)^{-1} \sigma_\nu A^{-1}\}\ x_\nu \end{aligned} \tag{1.1.34}$$

より

$$\Lambda_\mu{}^\nu = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{\sigma_\mu (A^\dagger)^{-1} \sigma_\nu A^{-1}\} \tag{1.1.35}$$

が導かれる。

実 4-元ベクトルの座標変換の公式 (1.1.20) と (1.1.35) から、その係数の全ての性質が導かれる。その為には、次の公式が便利である。

$$\begin{aligned} (\sigma_k)_{i,j}(\sigma_k)_{m,n} &= 2\delta_{i,n}\delta_{j,m} - \delta_{i,j}\delta_{m,n} \\ (\sigma_\mu)_{i,j}(\sigma_\mu)_{m,n} &= 2\delta_{i,n}\delta_{j,m} \\ &= (\tilde{\sigma}_\mu)_{i,j}(\sigma_\nu)_{m,n} g^{\mu,\nu} \end{aligned} \tag{1.1.36}$$

最初の式は、$2^4 = 16$ 個の i, j, m, n の組み合わせに対してそれらを 1) 1 と 2 の対のない場合、2) 1 と 2 の対が 1 つ、3) 1 と 2 の対が 2 つ、の 3 つの場合に分けて考えると

便利である。これらは 2 項係数 $1+4+6+4+1=2^4$ を真ん中で折り返したものになっている。すなわち 1) は 1111 or 2222 でこの場合は 1、2) は 1112 or 2221 のタイプで 0、3) の時は 1122 or 2211 の場合 -1、1212 or 2121 の場合 0、1221 or 2112 の場合 2 である。最初の式の右辺の組み合わせは、まさにこの様な数を出す組み合わせになっている。2 番目、3 番目の式は最初の式から簡単に得られる。これらを使うと

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}\{\sigma_\mu A\}Sp\{\sigma_\mu B\} &= (\sigma_\mu)_{i,j}A_{j,i}(\sigma_\mu)_{m,n}B_{n,m} \\ &= 2A_{j,i}B_{n,m}\delta_{i,n}\delta_{j,m} = 2\mathrm{Sp}\{AB\} \end{aligned} \tag{1.1.37}$$

が得られる。そこで

$$\begin{aligned} \Lambda^\lambda{}_\mu(A_1)\Lambda^\mu{}_\nu(A_2) &= \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{\sigma_\lambda A_1\sigma_\mu(A_1)^\dagger\}\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{\sigma_\mu A_2\sigma_\nu(A_2)^\dagger\} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{(A_1)^\dagger\sigma_\lambda A_1A_2\sigma_\nu(A_2)^\dagger\} = \frac{1}{2}Sp\{\sigma_\lambda A_1A_2\sigma_\nu(A_1A_2)^\dagger\} \\ &= \Lambda^\lambda{}_\nu(A_1A_2) \end{aligned} \tag{1.1.38}$$

これは 2 つの座標変換を続けて行なった結果である。特に $A_1A_2=1$ と取ると $\Lambda(A^{-1}) = \Lambda^{-1}(A)$ が得られる。更に座標変換の直交性は

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_{\nu'}\Lambda_\mu{}^\nu &= \frac{1}{4}\mathrm{Sp}\{\sigma_\mu A\sigma_{\nu'}A^\dagger\}\mathrm{Sp}\{\sigma_\mu(A^\dagger)^{-1}\sigma_\nu A^{-1}\} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{A\sigma_{\nu'}A^\dagger(A^\dagger)^{-1}\sigma_\nu A^{-1}\} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{\sigma_{\nu'}\sigma_\nu\} \\ &= \delta_{\nu',\nu} \end{aligned} \tag{1.1.39}$$

となる。

(注意)

球面ベクトルと 2 階の 2 次元対称スピノールとの関係は、双スピノールでは下付き添え字を持つ双スピノール $\tilde{X} = CX^*C^{-1}$ に対して行なうべきである。実際 (1.1.27) から $x^\mu = (x^0, x, y, z)$ に対して

$$\begin{aligned} x_{1,1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{X}_{2,\dot{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{X}^1_{\dot{1}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta^{1,1} \\ x_{1,0} &= z = \frac{1}{2}(\tilde{X}_{2,\dot{2}} - \tilde{X}_{1,\dot{1}}) = \frac{1}{2}(\tilde{X}^1_{\dot{2}} + \tilde{X}^2_{\dot{1}}) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta^{1,2}+\zeta^{2,1}) \\ x_{1,-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x-iy) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{X}_{1,\dot{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{X}^2_{\dot{2}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\zeta^{2,2} \\ x_{0,0} = x_0 &= \frac{1}{2}(\tilde{X}_{2,\dot{2}} + \tilde{X}_{1,\dot{1}}) = \frac{1}{2}(\tilde{X}^1_{\dot{2}} - \tilde{X}^2_{\dot{1}}) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta^{1,2}-\zeta^{2,1}) \end{aligned} \tag{1.1.40}$$

が得られる。ここに $\tilde{X}^{\alpha}_{\dot{\beta}} = \zeta^{\alpha,\beta}$ を使った。

公式 (1.1.20) と (1.1.35) から、ローレンツ変換と空間回転に対する 4-元実ベクトルに対する変換係数の具体的な表式が得られる。まずローレンツ変換に対しては、実ベクトル $a^\mu = (a^0, \boldsymbol{a})$ に対する (1.1.15) の関係式から

$$
\begin{aligned}
&A = \sum_\mu a^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} a^0 + a^3 & a^1 - ia^2 \\ a^1 + ia^2 & a^0 - a^3 \end{pmatrix} \\
&\det\ A = a^2 = (a^0)^2 - \boldsymbol{a}^2
\end{aligned}
\tag{1.1.41}
$$

と書ける。そこで $\boldsymbol{n}$ を 3-次元単位ベクトルとして

$$
a^0 = \cosh\frac{\varphi}{2} \quad , \quad \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{n}\sinh\frac{\varphi}{2} \tag{1.1.42}
$$

とすると、$\det\ A = \left(\cosh\frac{\varphi}{2}\right)^2 - \left(\sinh\frac{\varphi}{2}\right)^2 = 1$ となって (1.1.1) の unimodular 条件を満たす。あとで見る様に、$\boldsymbol{n}$ は運動する粒子の運動方向の単位ベクトルである。また A は hermite で $A^\dagger = A$ である。そこで $X' = AXA^\dagger = AXA$ である。また

$$
A = \sigma_0\cosh\frac{\varphi}{2} - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sinh\frac{\varphi}{2} = e^{-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\frac{\varphi}{2}} \tag{1.1.43}
$$

かつ、公式 (1.1.20) から

$$
\begin{aligned}
\Lambda^\mu{}_\nu &= \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{\sigma_\mu A \sigma_\nu A\} \\
(x')^\mu &= \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{\sigma_\mu A(\sigma_0 x^0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x})A\} \\
(x')^0 &= \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{A^2(x^0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x})\} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{(\cosh\varphi - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sinh\varphi)(x^0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x})\} \\
&= (\cosh\varphi)x^0 - (\sinh\varphi)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}) \\
\boldsymbol{x}' &= \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{\boldsymbol{\sigma} A(\sigma_0 x^0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x})A\} = \boldsymbol{n}\sinh\varphi x^0 + \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{\boldsymbol{\sigma} A(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x})A\}
\end{aligned}
\tag{1.1.44}
$$

そこで

$$
X' = A(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x})A \tag{1.1.45}
$$

とすると Sp $\{\boldsymbol{\sigma}X'\}$ には X' の $\boldsymbol{\sigma}$ に比例する項だけが残る。そこで

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}A &= \boldsymbol{\sigma}(a_0+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\sigma}a_0+\boldsymbol{a}-i[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{a}] \\
A\boldsymbol{\sigma}A &= (a_0+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma}a_0+\boldsymbol{a}-i[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{a}]) \\
&= \boldsymbol{\sigma}(a_0)^2+(\boldsymbol{a}+i[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{a}])a_0+(\boldsymbol{a}-i[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{a}])a_0+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} \\
&\quad -i[(\boldsymbol{a}+i[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{a}])\times\boldsymbol{a}] \\
&= \boldsymbol{\sigma}(a_0)^2+2\boldsymbol{a}a_0+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}+[[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{a}])\times\boldsymbol{a}] \\
&= \boldsymbol{\sigma}(a_0)^2+2\boldsymbol{a}a_0+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}-\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{a}^2+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} \\
&= \boldsymbol{\sigma}[(a_0)^2-\boldsymbol{a}^2]+2\boldsymbol{a}a_0+2(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}
\end{aligned} \tag{1.1.46}$$

より

$$X' = A(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x})A = 2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x})[(a_0)^2-\boldsymbol{a}^2]+2(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{1.1.47}$$

だから

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\{\boldsymbol{\sigma}A(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x})A\} = \boldsymbol{x}[(a_0)^2-\boldsymbol{a}^2]+2\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}) \\
&= \boldsymbol{x}+(\cosh\varphi-1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})
\end{aligned} \tag{1.1.48}$$

となる。結局 (1.1.44) の $\boldsymbol{x}'$ は

$$\boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{n}\sinh\varphi x^0+\boldsymbol{x}+(\cosh\varphi-1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}) \tag{1.1.49}$$

となる。そこで $\boldsymbol{n}$-軸周りの 4-元ベクトル $x^\mu=(x^0,\boldsymbol{x})$ のローレンツ変換は

$$\begin{aligned}
(x')^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\
(x')^0 &= (\cosh\varphi)x^0-(\sinh\varphi)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}) \\
(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}') &= -(\sinh\varphi)x^0+(\cosh\varphi)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}) \\
[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x}'] &= [\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x}]
\end{aligned} \tag{1.1.50}$$

特に $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_z$ 方向へのローレンツ変換に対しては $x^0=ct$ として

$$\begin{aligned}
ct' &= (\cosh\varphi)ct-(\sinh\varphi)z = \\
z' &= -(\sinh\varphi)ct+(\cosh\varphi)z \\
x' &= x \quad , \quad y'=y
\end{aligned} \tag{1.1.51}$$

ここに「特殊相対論」のところで議論した様に、$\mathcal{K}'$ を粒子の静止系 $\mathcal{K}$ を実験室系として、z-軸を粒子の運動方向とすると $z'=0$ から φ は z- 軸方向の粒子の運動速度

$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{n}V$ と $\beta = \tanh\varphi = (V/c)$ で関係している。また

$$
\begin{aligned}
\beta &= \tanh\varphi = (V/c) \\
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} > 1 \\
\beta &= \sqrt{1-\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2} = \frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma} \\
\cosh\varphi &= \frac{1}{\sqrt{1-(\tanh\varphi)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \\
\sinh\varphi &= \tanh\varphi\ \cosh\varphi = \beta\gamma
\end{aligned} \tag{1.1.52}
$$

より (ct, z) のローレンツ変換は

$$
\begin{pmatrix} ct' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ z \end{pmatrix} \tag{1.1.53}
$$

という以前の結果が再現される。(プライムのつき方が (**??**) と逆であることに注意！)

空間回転に対しては (1.1.16) を A に適用して

$$
\begin{aligned}
\tilde{A} &= \sum_\mu a^\mu \tilde{\sigma}_\mu = \begin{pmatrix} a^0 - a^3 & -a^1 + ia^2 \\ -a^1 - ia^2 & a^0 + a^3 \end{pmatrix} \\
det\ \tilde{A} &= a^2 = (a^0)^2 - \boldsymbol{a}^2
\end{aligned} \tag{1.1.54}
$$

で

$$
a^0 = \cos\frac{\theta}{2} \quad , \quad \boldsymbol{a} = i\boldsymbol{n}\sin\frac{\theta}{2} \tag{1.1.55}
$$

として $\det\ \tilde{A} = 1$ で

$$
\begin{aligned}
A &= \sigma_0 \cos\frac{\theta}{2} + i(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin\frac{\theta}{2} = e^{i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\frac{\theta}{2}} \\
\tilde{A} &= \sigma_0 \cos\frac{\theta}{2} - i(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin\frac{\theta}{2} = e^{-i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\frac{\theta}{2}} = A^{-1} = A^\dagger
\end{aligned} \tag{1.1.56}
$$

から A は unirary で、座標変換は

$$
\begin{aligned}
x'^m u &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\
\Lambda^\mu{}_\nu \text{む} &= \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\ \{\sigma_\mu A \sigma_\nu A^{-1}\}
\end{aligned} \tag{1.1.57}
$$

から求められる。まず簡単に $\Lambda^0{}_0 = \Lambda^0{}_k = \Lambda^k{}_0 = 0$ が分かる。次に空間部分の変換は

$$
\boldsymbol{x}' = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\ \{\boldsymbol{\sigma} A(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x})A^{-1}\} \tag{1.1.58}
$$

となるが、ここで $A\boldsymbol{\sigma}A^{-1}$ の計算は (1.1.46) にならって

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}\tilde{A} &= \boldsymbol{\sigma}(a_0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\sigma}a_0 - \boldsymbol{a} + i[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{a}] \\
A\boldsymbol{\sigma}\tilde{A} &= (a_0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma}a_0 - \boldsymbol{a} + i[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{a}]) \\
&= \boldsymbol{\sigma}(a_0)^2 + (\boldsymbol{a} + i[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{a}])a_0 - (\boldsymbol{a} - i[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{a}])a_0 - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} \\
&\quad + i[(\boldsymbol{a} + i[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{a}])\times\boldsymbol{a}] \\
&= \boldsymbol{\sigma}(a_0)^2 + 2i[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{a}]a_0 - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} - [[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{a}])\times\boldsymbol{a}] \\
&= \boldsymbol{\sigma}(a_0)^2 + 2i[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{a}]a_0 - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{a}^2 - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} \\
&= \boldsymbol{\sigma}[(a_0)^2 + \boldsymbol{a}^2] + 2i[\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{a}]a_0 - 2(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} \qquad (1.1.59)
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
X' &= A(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x})A^{-1} = (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x})\cos\theta - ([\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{n}]\cdot\boldsymbol{x})\sin\theta + (1-\cos\theta)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}) \\
&= (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}') \\
\boldsymbol{x}' &= \boldsymbol{x}\cos\theta - [\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x}]\sin\theta + (1-\cos\theta)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad (1.1.60)
\end{aligned}
$$

ここに $\boldsymbol{x}'$ は (1.1.58) の $\boldsymbol{x}'$ と同じものである。結局

$$
\boldsymbol{x}' = \cos\theta\ \boldsymbol{x} - \sin\theta\ [\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x}] + (1-\cos\theta)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}) \qquad (1.1.61)
$$

が得られる。これは以前「空間回転の生成子」のところで導いた (3.1.47) ((**??**)) の結果と同じである。特に $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_z$ の時

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (1.1.62)
$$

となる。これは z-軸周りの $\mathcal{K}$-系から $\mathcal{K}'$-系への座標回転である。

(注意) (3.1.47) の $e^{-\varphi(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{L})}$ は (1.1.56) の $A = e^{i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\frac{\theta}{2}}$ に対応しており、両者の間には

指数部の $-$ 符号だけのずれがある様に見えるが実はそうではない。ここでの取り扱いは、$\boldsymbol{\sigma}$ を座標系に依存しない絶対基準基底の様に扱っている。実際には $\boldsymbol{\sigma}$ もベクトルであり

$$
e^{i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\frac{\theta}{2}}\boldsymbol{\sigma}e^{-i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\frac{\theta}{2}} = \boldsymbol{\sigma}\cos\theta + [\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\sigma}]\sin\theta + (1-\cos\theta)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) \qquad (1.1.63)
$$

の様に変換する。この式は (1.1.60) の最初の式の結果である。この式は、Hausdorff の公式を用いて (3.1.47) と同様にして得られる。実際 (3.1.47) は角運動量の交換関係 $[L_i, x_j] = ie_{i,j,k}x_k$ だけに基づいているから、$[\sigma_i/2, \sigma_j] = ie_{i,j,k}\sigma_k$ から (3.1.47) で $\boldsymbol{L}\to\boldsymbol{\sigma}/2, \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\sigma}, \varphi\to-\theta$ と置き換えることによって直接得ることができる。(1.1.61)

はこの式に $\boldsymbol{x}$ を掛けて、その結果を $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{x}')$ として得られる。一方、空間部分とスピン部分を同時に変換する空間回転の生成子は全角運動量 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$ である。実際 $\boldsymbol{L}$ と $\boldsymbol{\sigma}$ は可換だから

$$
\begin{aligned}
e^{-i(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n})\varphi}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})e^{i(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n})\varphi} &= e^{-i(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\frac{\varphi}{2}}(\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{\sigma})e^{i(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n})\frac{\varphi}{2}} \\
&= \boldsymbol{x}'\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cos\theta-[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\sigma}]\sin\theta+(1-\cos\theta)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})) \\
&= (\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{\sigma}')
\end{aligned}
\tag{1.1.64}
$$

となり、$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma})$ が空間回転に対して不変であることが分かる。

最後に、双スピノール $(\xi^\alpha,\eta_{\dot\beta})$ の (空間) 反転 P (パリティ変換) について議論する。2-次元スピノール ξ^α の場合にはこれは問題にならない。そのわけは、P は空間回転 $\mathcal{R}$ とは独立でいかなる空間回転によつても P を実現できないからである。(空間回転によって、右手系を左手系に、あるいは左手系を右手系に変えることは出来ない。) 反転は ξ^α を新しいタイプのスピノール $\eta^{\dot\beta}$ or $\eta_{\dot\beta}$ に変換するものでなければならない。その際、$\boldsymbol{\sigma}$ は軸性ベクトルで反転によって符号を変えないから σ_z の固有値は不変で、(ξ^α) の上成分 ξ^1 は $(\eta_{\dot\beta})$ の上成分 $\eta_{\dot 1}$ (固有値 1/2)、(ξ^α) の下成分 ξ^2 は $(\eta_{\dot\beta})$ の下成分 $\eta_{\dot 1}$ (固有値 -1/2) に変換するはずである。そこで、 P は phase factor を除いて ξ^α を $\eta_{\dot\alpha}$ に, $\eta_{dot\beta}$ を ξ^β に変換する。P を 2 度くり返すと 0 か 360° 回転になるが、既に学んだ様にスピノールは 360° 回転でもとに戻らず符号を変えるので、スピノールの場合には $P^2=1$ と $P^2=-1$ とが原理的に可能である。前者の場合には $P=\pm1$、後者の場合には $P=\pm i$ となる。我々は最終的には $P^2=-1$ を取るので、以下ではこの場合を主に議論する。この場合

$$
P:\xi^\alpha\to i\eta_{\dot\alpha}\quad,\quad P:\eta_{\dot\beta}\to i\xi^\beta \tag{1.1.65}
$$

となる。ここで、上付きの添え字と下付きの添え字を同時にひっくり返すと相互の符号が変わるから

$$
P:\xi_\alpha\to -i\eta^{\dot\alpha}\quad,\quad P:\eta^{\dot\beta}\to -i\xi_\beta \tag{1.1.66}
$$

ここでもし $P^2=1$ と仮定すると、dot 付きの添え字の変換と dot 無しの添え字の変換が同じとなる。

P の双スピノール $X=(X^{\alpha\dot\beta})$ に対する効果を考える為に、(ξ,η) とは別に双スピノール (Ξ,H) を考え

$$
X^{\alpha\dot\beta}\sim\xi^\alpha H^{\dot\beta}+\Xi^\alpha\eta^{\dot\beta} \tag{1.1.67}
$$

とする。この場合

$$P : \xi^\alpha H^{\dot\beta} + \Xi^\alpha \eta^{\dot\beta} \to \eta_{\dot\alpha}\Xi_\beta + H_{\dot\alpha}\xi_\beta$$
$$= \xi_\beta H_{\dot\alpha} + \Xi_\beta \eta_{\dot\alpha} \sim X_{\beta\dot\alpha} \tag{1.1.68}$$

より

$$P : X^{\alpha\dot\beta} \to X_{\beta\dot\alpha} \tag{1.1.69}$$

が得られる。(1.1.18) から $P : X \to \tilde{X}$ が分かる。すなわち、$P : \sigma_\mu \to \tilde\sigma_\mu$ だからこれは $P : x^m u = (x^0, \boldsymbol{x}) \to x_\mu = (x^0, -\boldsymbol{x})$ を意味する。ここでは $\boldsymbol{x}$ は極性ベクトル (polar vector: 通常のベクトル) である。(1.1.67) の代わりに、二項目の符号を変えた双スピノール

$$A^{\alpha\dot\beta} \sim \xi^\alpha H^{\dot\beta} - \Xi^\alpha \eta^{\dot\beta} \tag{1.1.70}$$

を考える事もできる。この時 (1.1.68) の 1 項目と 2 項目が入れ替わるので、全体として負符号が余分につく。そこで

$$P : A^{\alpha\dot\beta} \to A_{\beta\dot\alpha} \tag{1.1.71}$$

そこで $P : A \to -\tilde{A}$ だから、4-元ベクトル a^μ に対しては $P : a^\mu = (a^0, \boldsymbol{a}) \to -a^\mu = (-a^0, \boldsymbol{a})$. すなわち $\boldsymbol{a}$ は軸性ベクトル (axial vector: 擬ベクトル) である。

3-次元テンソル $T_{i,j}$ と同様に 4-元テンソル $T^{\mu\nu}$ を 4-元ベクトル x^μ と同じ様に変換する量として定義することができる。反対称テンソル $\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$ が特に重要である。これは対角成分は全てゼロで、非対角部分に 3+3=6 個の独立成分を持つ。このうち 3 つは普通のベクトル $\boldsymbol{p}$ (polar vector) で、残り 3 つが 擬ベクトル $\boldsymbol{a}$ (axial vector) である。これらを次の様に配備する。

$$\sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & a_z & -a_y \\ -p_y & -a_z & 0 & a_x \\ -p_z & a_y & -a_x & 0 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}) \tag{1.1.72}$$

ここに σ^{0k} は通常の 4-元ベクトルの定義 $p^\mu = (p^0, p^k)$、σ^{ij} は反対称 3-次元テンソルを擬ベクトル $\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]$ で表わした時の定義

$$\sigma^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & c_z & -c_y \\ -c_z & 0 & c_x \\ c_y & -c_x & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}] \tag{1.1.73}$$

に基づいている。すなわち 2 つの球面ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ から作られる既約量はスカラー (内積) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ と外積 $[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]$、および 2-階の既約テンソル (traceless な対称テンソル) $[ab]^(2)_\mu$

$(\mu = 2, 1, 0, -1, -2)$ である。(「調和函数」のところの (4.4.10): (**??**) 参照) ここに外積が反対称テンソルに対応する。(1.1.73) は $c_k = e_{i,j,k} a_i b_j$ の添え字 i, j, k を順に並べたものである。 (1.1.70) の $\sigma^{\mu\nu} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$ は単なる記法である。我々は既に「特殊相対論」の電磁気学のところで、$F^{\mu\nu} = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$ を導入した。((**??**) 参照) (1.1.70) の $\sigma^{\mu\nu}$ の添え字の上げ下げは、通常のミンコフスキー metric $g^{\mu,\nu}$ によって行われる。すなわち $\sigma_{\mu\nu} = (-\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})$ である。これらに対して、次の性質がある。

$$\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{p}^2 = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} \quad , \quad (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{a}) = \frac{1}{8} e^{\mu,\nu,\lambda,\kappa}\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\lambda\kappa} \tag{1.1.74}$$

ここに $e_{\mu,\nu,\lambda,\kappa}$ 4-階の反対称テンソル、$e^{0,1,2,3} = -e_{0,1,2,3} = 1$ for even permutations, -1 for odd permutations, 0 othewise である。(下付き添え字の符号に注意！) 更に $\tau^{\mu\nu} = (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{b})$ とすると

$$\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\tau_{\mu\nu} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}) \tag{1.1.75}$$

も成り立つ。

1.2 Dirac 方程式

4-元運動量 $p = (p^\mu)$ (あるいは hermete 演算子 $p = p^\dagger$) の双スピノール $p^{\alpha,\dot\beta}, p_{\dot\beta,\alpha}$ を使って、spin 1/2 の粒子の Dirac 方程式は

$$\begin{aligned} p^{\alpha,\dot\beta}\eta_{\dot\beta} &= m\xi^\alpha \\ p_{\dot\beta,\alpha}\xi^\alpha &= m\eta_{\dot\beta} \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

と表わされる。ここで下の式から $\eta_{\dot\beta}$ を求めて、上の式に代入すると (1.1.30) を用いて

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m} p^{\alpha,\dot\beta} p_{\dot\beta,\alpha'}\xi^{\alpha'} = \frac{1}{m} p^2 \delta^{\alpha}{}_{\alpha'}\xi^{\alpha'} \\ &= \frac{1}{m} p^2 \xi^\alpha = m\xi^\alpha \\ &(p^2 - m^2)\xi^\alpha = 0 \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

が示される。同様にして $(p^2 - m^2)\eta_{\dot{\beta}} = 0$ である事も分かる。ここに、相対論的共変 4-元運動量演算子は

$$
\begin{aligned}
p^\mu &= i\partial^\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu} \\
&= (p^0, \boldsymbol{p}) = \left(i\frac{\partial}{\partial t}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right) \\
p_\mu &= i\partial_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu} \\
&= (p^0, -\boldsymbol{p}) = \left(i\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)
\end{aligned} \tag{1.2.3}
$$

で定義される。この section では、特に断らない限り自然単位 $\hbar = 1, c = 1$ を使う。スピン 0 の場合の平面波波動函数は $\boldsymbol{k}$ 方向に向かう進行波に対して

$$
\psi(x) = e^{-ikx} = e^{-ik^\mu x_\mu} = e^{-ik^0 t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{1.2.4}
$$

で定義する。自然単位系では $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$、$\frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = p^0 = \hbar k^0$ 等は $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$、$E = \omega = p^0 = k^0$ 等となる。そこで (1.2.2) を平面波に作用させると、$(k^0)^2 - \boldsymbol{k}^2 = k^m u k_\mu = k^2 = p^2$ と古典的運動量の二乗となる。ここから (1.1.65) の m は $m > 0$ の時、粒子の質量であることが分かる。

(1.2.1) は 2× 2 matrix の二組の関係式であるが、これを 4× 4 matrix の関係式に纏めるためにまず 2-次元 matrix と 2-次元ベクトルを用いて

$$
\begin{aligned}
(p^{\alpha,\dot{\beta}})(\eta_{\dot{\beta}}) &= m(\xi^\alpha) \\
(p_{\dot{\beta},\alpha})(\xi^\alpha) &= m(\eta_{\dot{\beta}})
\end{aligned} \tag{1.2.5}
$$

と書く。ここでこれまでの $\xi = (\xi^\alpha)$ 以外に新しく $\eta = (\eta_{\dot{\beta}})$ を導入する。($\eta = (\eta^\alpha)$ ではないので注意！) 更に、これらを縦に並べて 4-次元ベクトル $\psi = (\psi_i)$ $(i = 1$ - $4)$ を

$$
\psi = (\psi_i) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_{\dot{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \eta_{\dot{1}} \\ \eta_{\dot{2}} \end{pmatrix} \tag{1.2.6}
$$

導入する。ここで見る様に、4× 4 matrix を 4 つの 2× 2 matrix のブロックに分けて表示すると便利である。例えば、2× 2 単位行列 $E_2 = \sigma_0$ を 1 と書き

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.7}
$$

と略記する。一方、$(p^{\alpha,\dot\beta}) = \sigma^0 p^0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}$, $(p_{\dot\beta,\alpha}) = \tilde p = \sigma^0 p^0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}$ であることより

$$\begin{pmatrix}(\sigma^0 p^0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\eta \\ (\sigma^0 p^0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})\xi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^0 p^0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}) \\ (\sigma^0 p^0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix} \tag{1.2.8}$$

であることを使うと、(1.2.5) は

$$\begin{pmatrix} 0 & (\sigma^0 p^0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}) \\ (\sigma^0 p^0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix} = m\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix} \tag{1.2.9}$$

と書ける。これを 4× 4 matrix $\gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$ を導入して、$\gamma p = \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}$ を使って

$$(\gamma p - m)\psi = 0 \tag{1.2.10}$$

と書くと、(1.2.9) と比較する事により

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix} \tag{1.2.11}$$

であることが分かる。 γ^0 は (1.2.7) の 4× 4 matrix である。 (1.2.11) から、γ-matrix (γ^μ) の全ての性質が導かれる。まず、容易に

$$\begin{aligned}
&(\gamma^0)^2 = 1 \quad , \quad (\gamma^k)^2 = -1 \\
&\gamma^0\boldsymbol{\gamma} = -\boldsymbol{\gamma}\gamma^0 = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix} \\
&(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p})^2 = -\boldsymbol{p}^2 \\
&(\gamma p)^2 = (p^0)2 - \boldsymbol{p}^2 = p^\mu p_\mu = p^2
\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

が分かる。γ^0 と $\boldsymbol{\gamma}$ は反可換である。また (p^μ) は全て互いに可換であるから $(\gamma p)^2 = (\gamma^\mu p_\mu)(\gamma^\nu p_\nu) = (\gamma^\mu\gamma^\nu)p_\mu p_\nu = (\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)/2\ (p_\mu p_\nu) = p^2 = g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu$ より、$(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)/2 = g^{\mu\nu}$ が導かれる。更にここから、γ^0 と γ^k は反可換、$(\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i)/2 = -\delta^{i,j}$ で $(\gamma^k)^2 = -1$、$i \neq j$ の時 γ^i と γ^j も反可換であることが分かる。

(1.2.10) $(\gamma p - m)\psi = 0$ の複素共役式を得るために $\dagger$ を取ると、$\psi^\dagger(p^\dagger\gamma^\dagger - m) = 0$. ここで、右から γ^0 を掛けて $(\gamma^0)^2 = 1$ を用い $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ と定義すると $\overline{\psi}(p^\dagger\gamma^0\gamma^\dagger - m) = 0$. 更に $\gamma^0(\gamma^\lambda)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\lambda$ を使って、$\overline{\psi}(\gamma p^\dagger - m) = 0$. ここで運動量演算子 $p^\mu = i\partial^\mu$ に対して、$(p^\mu)^\dagger = -i\overleftarrow{(\partial^\mu)} = -\overleftarrow{p^\mu}$ である事に注意すると

$$\overline{\psi}(\gamma\overleftarrow{p} + m) = 0 \tag{1.2.13}$$

が得られる。ここに運動量演算子 $\overleftarrow{p}$ は左の波動函数 $\overline{\psi}$ に作用するものとする。$\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ の定義は、ψ^* を横並びのベクトルの事と暗黙のうちに仮定していると考えると $\overline{\psi} = \psi^*\gamma^0$

とも書ける。しかし、ket side の $\bar{}$ は左から γ^0 を掛けて定義する。つまり $\overline{\overline{\psi}} = \gamma^0\overline{\psi}^\dagger = \gamma^0(\psi^\dagger\gamma^0)^\dagger = \gamma^0\gamma^{0\dagger}\psi = \psi$ と元へ戻る。あるいは $\overline{\overline{\psi}} = \overline{\psi^*\gamma^0} = \psi^*\gamma^{0*}\gamma^0 = \psi$ としても同じである。そこで $\overline{\overline{A}} = A$ である。更に $\overline{AB} = \overline{B}\gamma^0\overline{A}$ が成り立つ。

ψ と共役な波動函数が非相対論の時の様に ψ^* ではなく $\overline{\psi}$ であることは、これから色々な場合で遭遇する。まず (1.2.10) の左から $\overline{\psi}$ を掛け、(1.2.13) の右から ψ を掛けて足し合わせると

$$\overline{\psi}(\gamma p)\psi + \overline{\psi}(\gamma \overleftarrow{p})\psi = p(\overline{\psi}\gamma\psi) = 0 \tag{1.2.14}$$

が得られる。ここで

$$j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi = (\psi^*\psi, \psi^*\boldsymbol{\gamma}\psi) \tag{1.2.15}$$

とすると、$p^\mu = i\partial^\mu$ より (1.2.14) は

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{1.2.16}$$

を意味する。これは current $j^\mu = (\rho, \boldsymbol{j})$ に対する連続の式である。$\rho = \psi^*\psi = |\psi|^2 > 0$ は正定値の密度である。 (**??**) を Dirac 粒子のベクトルカレント (vector current) という。

(1.2.2) のパリティ変換 P は 4-成分波動函数の ξ と η を (extra i を伴って) 入れ替える。つまり (**??**) の γ^0 を使って

$$P : \psi \rightarrow i\gamma^0\psi \quad , \quad P : \overline{\psi} \rightarrow -i\overline{\psi}\gamma^0 \tag{1.2.17}$$

と表わされる。実際後半は、$\overline{\psi} = (\xi^*, \eta^*)\gamma^0 = {}^t\psi^*\gamma^0$ で $(\xi, \eta) \rightarrow i(\xi, \eta)\gamma^0$ として $P : \overline{\psi}$ は $-i(\xi^*, \eta^*) = -i(\xi^*, \eta^*)(\gamma^0)^2 = -i\overline{\psi}\gamma^0$ である。Dirac 方程式がパリティ変換に対して不変である事は (1.2.8) からほとんど明らかである。あるいはほとんど同じことだが、まず Dira 方程式 (1.2.10) がパリティ変換で元に戻ることを直接示す為に、それを $(\gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p} - m)\psi = 0$ と書く。ここで $\psi \rightarrow i\gamma^0, \boldsymbol{p} \rightarrow -\boldsymbol{p}$ の置き換えを行なう。つまり $(\gamma^0 p^0 + \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p})\gamma^0\psi = 0.$ 更に、左から γ^0 を掛けて γ^0 と $\boldsymbol{\gamma}$ が反可換であることを用いると再び初めの式に戻る。また 4-次元空間の matrix γ^μ に対しても $P\gamma^\mu P^{-1} \sim i\gamma^0(\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})(-i)\gamma^0 = (\gamma^0, -\boldsymbol{\gamma}) = \gamma_\mu$ より、$\boldsymbol{\gamma}$ は通常のベクトルの様に振る舞うことが分かる。

一般に 4-次元空間の unitary 変換 $\psi' = U\psi$ $(U^{-1} = U^\dagger)$ を行うと、Dirac 方程式 (1.2.10) は $(\gamma' p - m)\psi' = 0$ と変換される。ここに $\gamma' = U\gamma U^{-1}$ である。この時 $(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)/2 = g^{\mu\nu}$ 等の γ-matrix の性質は保存される。($g^{\mu\nu}$ は 4-次元空間の単位行列に掛かっている。) この様な変換は 4-次元空間での方程式の表示を変えることにすぎ

ない。その様な例として、次の標準表示がよく使われる。まず (1.2.9) で粒子の静止系に移ると、$\boldsymbol{p}=0, p^0=m$ だから $\xi=\eta$ となって 4 ベクトルの下 2 つのスピノール成分が上 2 つの成分と同じになる。しかし 4-次元 unitary 変換を適当に取って、下成分が静止系でゼロになる様にすることができる。その様な表示は、これまでのスピノール表示とは別に標準表示と呼ばれる。すなわち ψ' として

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi+\eta) \quad , \quad \chi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi-\eta) \tag{1.2.18}$$

を取り

$$\phi'=\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=U\psi \tag{1.2.19}$$

とする。 U は $U^2=1, U=U^\dagger=U^{-1}$ を満たす直交行列である。対応する γ-matrix は ${\gamma'}^\mu=U\gamma^\mu U^{-1}$ から簡単に求められる。これは単なる表示の違いであるから ψ', γ' を再び ψ, γ で表わすことにする。標準表示では (1.2.11) は

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix} \tag{1.2.20}$$

となる。 γ^0 の表式から、標準表示では静止系で $\chi=0$ となることが分かる。

Dirac 方程式 $(\gamma^0 p^0-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}-m)\psi=0$ を 4-成分波動函数の非相対論的 Schrödinger 方程式のかたちに書くことが出来る。そのためには、上式の 2-項目、3-項目を右辺に移して左から γ^0 を掛けると $p^0=i\partial^0=i(\partial/\partial t)$ より $\alpha=\gamma^0\boldsymbol{\gamma}$, $\beta=\gamma^0$ と置いて

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi=H\psi=(\alpha\cdot\boldsymbol{p}+\beta)\psi \tag{1.2.21}$$

ここに α, β の具体的な表式は

$$\begin{aligned}
\beta^0&=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & -\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix} \qquad (\text{スピノール表示})\\
\beta^0&=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix} \qquad (\text{標準表示})
\end{aligned} \tag{1.2.22}$$

である。(1.2.21) の $H=H^\dagger=\alpha\cdot\boldsymbol{p}+m\beta$ は hermite で Dirac Hamiltonian と呼ばれる。 α と β に (1.2.12) の $\boldsymbol{\gamma}, \gamma^0$ に類似の関係式が成り立つ。まず ${\alpha_k}^2=\gamma^0\gamma^k\gamma^0\gamma^k=-{\gamma^k}^2=1$. $(\alpha\cdot\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}^2$. また β と α^k は全て互いに反可換である。

$$\begin{aligned}
&\alpha^i\alpha^j+\alpha^j\alpha^i=0 \quad \text{for} \quad i\neq j\\
&\alpha^k\beta+\beta\alpha^k=0 \quad , \quad {\alpha^k}^2=\beta^2=1
\end{aligned} \tag{1.2.23}$$

双スピノール ψ はスピノール表示であろうと標準であろうといずれも上下二段のスピノールが上がスピン投影値が 1/2, 下が $-1/2$ になる様に並べられている。そこで 4-元スピノールのスピン演算子は

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \tag{1.2.24}$$

である。

$\boldsymbol{\Sigma}$ は、擬スカラー γ-matrix

$$\begin{aligned} \gamma^5 &= -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ &= \frac{i}{24} e_{\lambda\mu\nu\sigma}\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(スピノール表示)} \\ &\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(標準表示)} \end{aligned} \tag{1.2.25}$$

を使って

$$\boldsymbol{\Sigma} = -\boldsymbol{\alpha}\gamma^5 = -\frac{i}{2}\left[\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\alpha}\right] \tag{1.2.26}$$

と表される。ここから $\boldsymbol{\Sigma}$ が擬ベクトル (軸性ベクトル) であることは明らかである。(1.2.25) の γ^5 の定義から

$$\begin{aligned} \gamma^{5\dagger} &= i\gamma^{3\dagger}\gamma^{2\dagger}\gamma^{1\dagger}\gamma^{0\dagger} = -i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 \\ &= -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5 \end{aligned} \tag{1.2.27}$$

より、γ^5 は hermite である。更に $\boldsymbol{\Sigma}$ と γ^5 は可換だから、容易に

$$\beta\gamma^5 + \gamma^5\beta = 0 \quad , \quad \boldsymbol{\alpha}\gamma^5 - \gamma^5\boldsymbol{\alpha} = 0 \quad , \quad (\gamma^5)^2 = 1 \tag{1.2.28}$$

が分かる。

(γ-matrix の代数)

反対称テンソル $\sigma^{\mu\nu}$ を $\sigma^{\mu\nu} = (\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)/2$ で定義する。 $\sigma^{0k} = \gamma^0\gamma^k = \alpha^k$,

$\sigma^{ij} = \gamma^i\gamma^j = -ie_{i,j,k}\Sigma^k$ から、$\sigma^{\mu\nu} = (\boldsymbol{\alpha}, -i\boldsymbol{\Sigma})$ である。

$$\begin{aligned}
\sigma^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = (\boldsymbol{\alpha}, -i\boldsymbol{\Sigma}) \\
g^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) \\
\gamma^\mu\gamma^\nu &= g^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} \\
\gamma^0\boldsymbol{\gamma} &= \boldsymbol{\alpha} \\
\gamma^i\gamma^j &= -\delta^{ij} - ie_{i,j,k}\Sigma^k \\
\boldsymbol{\alpha}^i\boldsymbol{\alpha}^j &= \delta^{ij} + ie_{i,j,k}\Sigma^k \\
(\boldsymbol{\alpha a})(\boldsymbol{\alpha b}) &= (\boldsymbol{ab}) + i\,[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\,\boldsymbol{\Sigma} \\
(\boldsymbol{\alpha a})\boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{a} + i\,[\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{a}] \\
\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha b}) &= \boldsymbol{b} - i\,[\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{b}]
\end{aligned} \tag{1.2.29}$$

($\boldsymbol{\gamma}$ でなく) $\boldsymbol{\alpha}$ についての最後の 4 式は、3-次元でのよく知られた公式 $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + ie_{i,j,k}\sigma_k$ に対応する。

次に双スピノール函数 ψ のローレンツ変換と空間回転を考える。スピノール表示では $\psi = (\xi, \eta)$ で $\xi' = A\xi$, $\eta' = CA^*C^{-1}\eta = (A^\dagger)^{-1}\eta$ と変換することにより

$$\psi' = \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^\dagger)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{1.2.30}$$

となる。特にローレンツ変換に対しては $A = A^\dagger$ より

$$\begin{aligned}
\psi' &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}\psi = \begin{pmatrix} a^0 + \boldsymbol{\sigma a} & 0 \\ 0 & a^0 - \boldsymbol{\sigma a} \end{pmatrix}\psi \\
&= (a^0 + \boldsymbol{\alpha a})\psi = \left(\cosh\frac{\varphi}{2} - \boldsymbol{n\alpha}\sinh\frac{\varphi}{2}\right)\psi = e^{-\boldsymbol{n\alpha}\frac{\varphi}{2}}\psi
\end{aligned} \tag{1.2.31}$$

である。最後の行では $(\boldsymbol{\alpha a})^2 = \boldsymbol{a}^2$ を使った。ここで $(\varphi, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\beta}$, $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{n}$, $\beta = |\boldsymbol{\beta}| = \tanh\varphi = \frac{V}{c}$ として、これを

$$\begin{aligned}
L(\varphi, \boldsymbol{n}) = L(\boldsymbol{\beta}) &= e^{-\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{\alpha}\hat{\boldsymbol{\beta}}} = \cosh\frac{\varphi}{2} - (\boldsymbol{\alpha}\hat{\boldsymbol{\beta}})\sinh\frac{\varphi}{2} \\
\psi' &= L(\varphi, \boldsymbol{n})\psi = L(\boldsymbol{\beta})\psi
\end{aligned} \tag{1.2.32}$$

と書く。

Dirac 方程式 (1.2.10) の左から $L(\boldsymbol{\beta})$ を作用させると、$(L(\boldsymbol{\beta})\gamma p L(\boldsymbol{\beta})^{-1} - m)L(\boldsymbol{\beta})\psi = 0$. そこで $L(\boldsymbol{\beta})\gamma p L(\boldsymbol{\beta})^{-1} = \gamma p'$ としてこれを $(\gamma p' - m)\psi' = 0$ と書くと、$p \to p'$ は新しい座標系へのローレンツ変換となる。これを求めるために、まず $L(\boldsymbol{\beta})\gamma^0 L(\boldsymbol{\beta})^{-1}$ と

$L(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\gamma}L(\boldsymbol{\beta})^{-1}$ を計算する。まず

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\beta})\gamma^0 L^{-1}(\boldsymbol{\beta}) &= (a^0+\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha})\gamma^0(a^0-\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha}) = (a^0+\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha})^2\gamma^0 = ([(a^0)^2+\boldsymbol{a}^2]+2a^0(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha}))\gamma^0 \\
&= \gamma^0[(a^0)^2+\boldsymbol{a}^2]-2a^0(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\gamma})
\end{aligned}
\tag{1.2.33}
$$

また

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\gamma}L^{-1}(\boldsymbol{\beta}) &= (a^0+\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\gamma}(a^0-\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha}) = -(a^0+\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}(a^0+\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha})\gamma^0 \\
&= -(a^0\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{a}+i\,[\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{a}])(a^0+\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha})\gamma^0 \\
&= -(a^0\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{a}+i[\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{a}]))a^0\gamma^0-a^0(\boldsymbol{a}-i\,[\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{a}])\gamma^0 \\
&\quad -(\boldsymbol{a}+i\,[\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{a}])(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha})\gamma^0 \\
&= -(a^0\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{a}+i\,[\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{a}]+\boldsymbol{a}-i\,[\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{a}]))a^0\gamma^0 \\
&\quad -(\boldsymbol{a}+i\,[\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{a}])(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha})\gamma^0 \\
&= -(a^0\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{a})a^0\gamma^0-(\boldsymbol{a}+i\,[\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{a}])(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha})\gamma^0 \\
&= -((a^0)^2\boldsymbol{\alpha}+2a^0\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha})+i\,[\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{a}]\,(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha}))\gamma^0 \\
&= (a^0)^2\boldsymbol{\gamma}-2a^0\boldsymbol{a}\gamma^0+\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\gamma})-i\,[\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{a}]\,(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha})\gamma^0
\end{aligned}
\tag{1.2.34}
$$

ここに最後の項は (**??**) の $\boldsymbol{\Sigma}=-\boldsymbol{\alpha}\gamma^5=-\gamma^5\boldsymbol{\alpha}$ を使って

$$
\begin{aligned}
\text{最後の項} &= \gamma^5 i[(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{a}))\times\boldsymbol{a}]\gamma^0 = \gamma^5 i[(\boldsymbol{a}-i[\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{a}])\times\boldsymbol{a}]\gamma^0 \\
&= \gamma^5[\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{a}]\times\boldsymbol{a}]\gamma^0 = -\left[[\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{a}]\times\boldsymbol{a}\right]\gamma^0 \\
&= -\left[-\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{a}^2)+\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\alpha})\right]\gamma^0 = -\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{a}^2)+\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\gamma})
\end{aligned}
\tag{1.2.35}
$$

より

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\gamma}L^{-1}(\boldsymbol{\beta}) &= (a^0)^2\boldsymbol{\gamma}-2a^0\boldsymbol{a}\gamma^0+\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\gamma})-\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{a}^2)+\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\gamma}) \\
&= \boldsymbol{\gamma}\left[(a^0)^2-\boldsymbol{a}^2\right]-2a^0\boldsymbol{a}\gamma^0+2\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\gamma})
\end{aligned}
\tag{1.2.36}
$$

そこで

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\beta})(\gamma p)L^{-1}(\boldsymbol{\beta}) &= L(\boldsymbol{\beta})(\gamma^0p^0-\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{p})L^{-1}(\boldsymbol{\beta}) \\
&= \{\gamma^0\left[(a^0)^2+\boldsymbol{a}^2\right]-2a^0(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\gamma})\}p^0-\{\boldsymbol{\gamma}\left[(a^0)^2-\boldsymbol{a}^2\right]-2a^0\boldsymbol{a}\gamma^0 \\
&\quad +2\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\gamma})\}\boldsymbol{p} \\
&= \gamma^0p^0\left[(a^0)^2+\boldsymbol{a}^2\right]-(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{p})\left[(a^0)^2-\boldsymbol{a}^2\right]-2a^0\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\gamma}p^0-\gamma^0\boldsymbol{p}) \\
&\quad -2(\boldsymbol{a}\boldsymbol{p})(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\gamma}) \\
&= \gamma^0p^0\cosh\varphi-(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{p})+\boldsymbol{n}\left[\boldsymbol{\gamma}p^0-\gamma^0\boldsymbol{p}\right]\sinh\varphi \\
&\quad -(\cosh\varphi-1)(\boldsymbol{n}\boldsymbol{p})(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\gamma})
\end{aligned}
\tag{1.2.37}
$$

これを $\gamma p'=\gamma^0p^{0'}-\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{p}'$ と等しいと置くと

$$
\begin{aligned}
p^{0'} &= \cosh\varphi p^0-\sinh\varphi(\boldsymbol{n}\boldsymbol{p}) \\
\boldsymbol{p}' &= \boldsymbol{p}-\sinh\varphi\boldsymbol{n}p^0+(\cosh\varphi-1)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{p})
\end{aligned}
\tag{1.2.38}
$$

ここに $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{n}$ とおいた。そこで

$$\begin{pmatrix} p^{0\prime} \\ (\boldsymbol{n}\boldsymbol{p}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^0 \\ (\boldsymbol{n}\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}$$
$$[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}'] = [\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}] \tag{1.2.39}$$

これは以前の結果である。

空間回転に対しては $A^\dagger = A^{-1} = A$ (unitary) より (1.2.30) は

$$\psi' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}\psi = \begin{pmatrix} a^0 + \boldsymbol{\sigma a} & 0 \\ 0 & a^0 + \boldsymbol{\sigma a} \end{pmatrix}\psi$$
$$= (a^0 + \boldsymbol{\Sigma a})\psi = \left(\cos\frac{\theta}{2} + i\boldsymbol{n\Sigma}\sin\frac{\theta}{2}\right)\psi = e^{i\boldsymbol{n\Sigma}\frac{\theta}{2}}\psi \tag{1.2.40}$$

である。これを

$$R(\theta, \boldsymbol{n}) = R(\boldsymbol{\theta}) = e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\Sigma}\hat{\boldsymbol{n}}} = \cos\frac{\theta}{2} + i(\boldsymbol{\Sigma}\hat{\boldsymbol{n}})\sin\frac{\theta}{2}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}\hat{\boldsymbol{n}}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}\hat{\boldsymbol{n}}} \end{pmatrix}$$
$$\psi' = R(\theta, \boldsymbol{n})\psi = R(\boldsymbol{\theta})\psi \tag{1.2.41}$$

と書く。Lorentz 変換の時の様に Dirac 方程式 (1.2.10) の左から $R(\boldsymbol{\theta})$ を作用させて、$R(\boldsymbol{\theta})\gamma p R(\boldsymbol{\theta})^{-1} = \gamma p'$ として新しい Dirac 方程式を $(\gamma p' - m)\psi' = 0$ と書くと、$p \to p'$ は元の座標系 $\mathcal{K}$ から新しい座標系 $\mathcal{K}'$ への座標変換となる。これを求めるために、まず $R(\boldsymbol{\theta})\gamma^0 R(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ と $R(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\gamma}R(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ を計算する。まず $\boldsymbol{\alpha}$ と γ^0 と γ^5 は共に反可換だから、(**??**) より $\boldsymbol{\Sigma}$ と γ^0 は可換で

$$R(\boldsymbol{\theta})\gamma^0 R(\boldsymbol{\theta})^{-1} = e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\Sigma}\hat{\boldsymbol{n}}}\gamma^0 e^{-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\Sigma}\hat{\boldsymbol{n}}} = \gamma^0 \tag{1.2.42}$$

また、例えば標準表示では

$$R(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\gamma}R(\boldsymbol{\theta})^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}\hat{\boldsymbol{n}}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}\hat{\boldsymbol{n}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}\hat{\boldsymbol{n}}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}\hat{\boldsymbol{n}}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}\hat{\boldsymbol{n}}}\boldsymbol{\sigma}e^{-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}\hat{\boldsymbol{n}}} \\ -e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}\hat{\boldsymbol{n}}}\boldsymbol{\sigma}e^{-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}\hat{\boldsymbol{n}}} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.43}$$

ここに (**??**) の結果から、$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$ として

$$e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}\hat{\boldsymbol{n}}}(\boldsymbol{\sigma p})e^{-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}\hat{\boldsymbol{n}}} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{p}\cos\theta - [\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}]\sin\theta + (1-\cos\theta)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p})) \tag{1.2.44}$$

だから、$\boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\gamma}$ とした式に対しても同様な関係式が成り立つ。つまり

$$
\begin{aligned}
R(\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\gamma p})R(\boldsymbol{\theta})^{-1} &= e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\Sigma}\hat{\boldsymbol{n}}}(\boldsymbol{\gamma p})e^{-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\Sigma}\hat{\boldsymbol{n}}} \\
&= e^{i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}\hat{\boldsymbol{n}}}(\boldsymbol{\gamma p})e^{-i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\sigma}\hat{\boldsymbol{n}}} \\
&= \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{p}\cos\theta - [\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}]\sin\theta + (1-\cos\theta)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p})) = (\boldsymbol{\gamma p}') \qquad (1.2.45)
\end{aligned}
$$

より、$\mathcal{K}$ から $\mathcal{K}'$ への $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{n}\theta$ の方向と大きさの空間回転に対して

$$
\boldsymbol{p}' = \cos\theta\boldsymbol{p} - [\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}]\sin\theta + (1-\cos\theta)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}) \qquad (1.2.46)
$$

が得られる。この結果は ($\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$ となっただけで) (1.1.61) の結果と同じである。

無限小変換 $(\varepsilon^{\mu\nu}) = (\boldsymbol{\beta}, -\boldsymbol{\theta}) \sim 0$ に対しては、ローレンツ変換と空間回転を同時に一つの式で書き表すことが出る。即ち四次元反対称テンソル $(\sigma^{\mu\nu}) = (\boldsymbol{\alpha}, -i\boldsymbol{\Sigma})$ に対して

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\beta})R(\boldsymbol{\sigma}) &= (1 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta\alpha}))(1 + i\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta\Sigma})) \sim 1 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta\alpha}) + i\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta\Sigma}) \\
&= 1 + \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = S(\varepsilon) \qquad (1.2.47)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ここに (1.1.75) から得られる $\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = i(\boldsymbol{\theta\Sigma}) - (\boldsymbol{\beta\alpha})$ を使った。

(平面波)

スピン 0 の場合の平面波波動函数 (1.2.4) にならって、スピン 1/2 を持つ Dirac 粒子の平面波は自然単位系で

$$
\psi(x) = \mathrm{const} \times u_p e^{-ipx} = \mathrm{const} \times u_p e^{-ip^0 t + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \qquad (1.2.48)
$$

で表わされる。ここに $p = (p^\mu) = (p^0, \boldsymbol{p})$ は $p^2 = (p^0)^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2$ より $p^0 = \pm\sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2}$ の二つが可能であるが、plus 記号を固定して $\varepsilon = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2} > 0$ (for $m > 0$) と決めておくと便利である。明らかにこれは $m > 0$ を持つ粒子のエネルギーである。$m < 0$ を持つ反粒子のエネルギーに対しては、$p^0 = -varepsilon$ を取る。この場合、$\boldsymbol{x}$ の符号も変えて 4-運動量を $-p$ と書くこととする。即ち

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}u_p e^{-ipx} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}u_p e^{-i\varepsilon t + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \quad \text{for particle} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}u_{-p} e^{ipx} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}u_{-p} e^{i\varepsilon t - i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \quad \text{for anti-particle} \qquad (1.2.49)
\end{aligned}
$$

で表わされる。ここに $\varepsilon = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{p}^2}$ である。spinor function $u_{\pm p}$ は Dirac 方程式

$$
(\gamma p - m)u_p = 0 \qquad (1.2.50)
$$

を満たす。また $\overline{u}_p$ に対しては、今度は p が c-number なので符号の変化は無く

$$\overline{u}_p(\gamma p - m) = 0 \tag{1.2.51}$$

が得られる。反粒子に対しては、$p \to -p$ とすればよい。つまり

$$(\gamma p + m)u_{-p} = 0 \quad , \quad \overline{u}_{-p}(\gamma p + m) = 0 \tag{1.2.52}$$

$u_{\pm p}$ は

$$\overline{u}_p u_p = 2m \quad , \quad \overline{u}_{-p}u_{-p} = -2m \tag{1.2.53}$$

つまり、$\overline{u}_{\pm p}u_{\pm p} = \pm 2m$ で normalize される。反粒子に対しては $m < 0$ だから (1.2.53) の右辺は常に正である。(1.2.50) - 1.2.53) から

$$(\overline{u}_{\pm p}\gamma u_{\pm p})p = \pm m(\overline{u}_{\pm p}u_{\pm p}) = 2m^2 = 2p^2 \tag{1.2.54}$$

より

$$\overline{u}_{\pm p}\gamma u_{\pm p} = 2p \tag{1.2.55}$$

であるから

$$\overline{\psi}_{\pm p}\gamma\psi_{\pm p} = \frac{1}{2\varepsilon}(\overline{u}_{\pm p}\gamma u_{\pm p}) = \frac{p}{\varepsilon} = (1, \boldsymbol{v}) \tag{1.2.56}$$

つまり $\psi_{\pm p}$ は単位体積あたり粒子一個、反粒子一個の割合で normalize されている。(ここで、$p = (p^0, \boldsymbol{p})$ は常に $p^0 = \varepsilon > 0$ と考えている。)

$$\frac{1}{2\varepsilon}u_p = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} \tag{1.2.57}$$

として Dirac 方程式 (1.2.50) を標準表示で書くと

$$\begin{pmatrix} (\varepsilon - m) & -\boldsymbol{\sigma p} \\ \boldsymbol{\sigma p} & -(\varepsilon + m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi & \varphi \end{pmatrix} = 0 \tag{1.2.58}$$

そこで

$$\psi = \frac{\boldsymbol{\sigma p}}{\varepsilon - m} \quad , \quad \varphi = \frac{\boldsymbol{\sigma p}}{\varepsilon + m}\psi \tag{1.2.59}$$

が得られる。そこで

$$\frac{1}{(2\varepsilon)^2}\overline{u}_p u_p = \psi^d agger\psi - \varphi^\dagger\varphi = \left(1 - \frac{\varepsilon - m}{\varepsilon + m}\right)(\psi^\dagger\psi) = \frac{2m}{\varepsilon + m}(\psi^*\psi) = \frac{2m}{(2\varepsilon)^2} \tag{1.2.60}$$

ここから w を $w^* w = 1$ と normalize された 2-次元スピノールとして、

$$u_p = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m}w \\ \sqrt{\varepsilon - m}(\boldsymbol{n\sigma})w \end{pmatrix} \tag{1.2.61}$$

であることがわかる。反粒子に対しては $m \to -m$ として、新しい 2-次元スピノール w' を用いて $w \to (\boldsymbol{n\sigma})w'$ とする。

$$u_{-p} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon - m}(\boldsymbol{n\sigma})w' \\ \sqrt{\varepsilon + m}w' \end{pmatrix} \tag{1.2.62}$$

静止系 (rest frame) に対しては、$\boldsymbol{p} = 0$ と置いてそれぞれ

$$\begin{aligned} u_p &= \begin{pmatrix} \sqrt{2m}w \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_{-p} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2m}w' \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.2.63}$$

である。いずれも (1.2.53) の $\overline{u}_{\pm p} u_{\pm p} = \pm 2m$ を満たす。

(復習) 2-次元スピノールの基本は z-方向のスピン成分 $\sigma = \pm 1/2$ を持った 2-次元ベクトル

$$w^{-1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{1.2.64}$$

である。それらの直交性は

$$^t w^\sigma w^{\sigma'} = \delta_{\sigma,\sigma'} \tag{1.2.65}$$

これをまとめて $w^* w = 1$ と書く。また完全性は

$$\begin{aligned} ww^* &= \sum_\sigma w^{\sigma\, t} w^\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{1.2.66}$$

これは 2-次元空間における単位行列である。

(1.2.61) - (1.2.62) はより正確には

$$\begin{aligned} u_{p,\sigma} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon + m}w^\sigma \\ \sqrt{\varepsilon - m}(\boldsymbol{n\sigma})w^\sigma \end{pmatrix} \\ u_{-p,-\sigma} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon - m}(\boldsymbol{n\sigma})(w')^{-\sigma} \\ \sqrt{\varepsilon + m}(w')^{-\sigma} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.2.67}$$

である。また $\overline{u}_{\pm p,\sigma}$ についても同様に

$$\begin{aligned} \overline{u}_{p,\sigma} &= \begin{pmatrix} w^{\sigma *}\sqrt{\varepsilon + m} & -w^{\sigma *}\sqrt{\varepsilon - m}(\boldsymbol{n\sigma}) \end{pmatrix} \\ \overline{u}_{-p,-\sigma} &= \begin{pmatrix} (w')^{-\sigma *}(\boldsymbol{n\sigma})\sqrt{\varepsilon - m} & -(w')^{-\sigma *}\sqrt{\varepsilon + m} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.2.68}$$

である。(1.2.53) の直交性は

$$\overline{u}_{p,\sigma}u_{p,\sigma'} = 2m\delta_{\sigma,\sigma'} \quad , \quad \overline{u}_{-p,\sigma}u_{-p,\sigma'} = -2m\delta_{\sigma,\sigma'} \tag{1.2.69}$$

である。また完全性は (??) を使って

$$\sum_\sigma u_{\pm p,\sigma}\overline{u}_{\pm p,\sigma} = \gamma p \pm m \tag{1.2.70}$$

が成り立つ。そこで

$$\sum_\sigma u_{p,\sigma}\overline{u}_{p,\sigma} - \sum_\sigma u_{p,\sigma}\overline{u}_{p,\sigma} = 2m \tag{1.2.71}$$

は 4×4 単位行列 (を $4m$ 倍したもの) である。その意味で (1.2.70) は 4×4 行列の射影演算子 (projection operator) である。

u_p は標準表示におけるハミルトニアン $H = \alpha\boldsymbol{p} + \beta m$ の固有状態である。すなわち H の固有値方程式から $\lambda = \pm\varepsilon$ が二つの固有値であるが、ε は粒子の固有値で $Hu_p = \varepsilon u_p$ が成り立っている。一方、反粒子の固有状態は u_{-p} ではなく $\gamma^0 u_{-p} = \overline{u}_{-p}{}^\dagger$ で $H\gamma u_{-p} = -\varepsilon\gamma u_{-p}$ が成り立つ。実際

$$\begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma p} \\ \boldsymbol{\sigma p} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon+m}w \\ \sqrt{\varepsilon-m}(\boldsymbol{n\sigma})w \end{pmatrix} = \varepsilon\begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon+m}w \\ \sqrt{\varepsilon-m}(\boldsymbol{n\sigma})w \end{pmatrix} \tag{1.2.72}$$

同様に

$$\begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma p} \\ \boldsymbol{\sigma p} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon-m}(\boldsymbol{n\sigma})w' \\ -\sqrt{\varepsilon+m}w' \end{pmatrix} = -\varepsilon\begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon-m}(\boldsymbol{n\sigma})w' \\ -\sqrt{\varepsilon+m}w' \end{pmatrix} \tag{1.2.73}$$

である。ここから、反粒子のエネルギーはこの表示では $p^0 = -\varepsilon = -\sqrt{m^2+\boldsymbol{p}^2} \leqq -|m| < 0$ であることがわかる。

(練習問題-1) ローレンツ変換 (1.2.32) と (1.2.63) を用いて (1.2.61) と (1.2.62) が得られることを示せ。

(解答) (1.2.32) から

$$\psi' = e^{-\frac{\varphi}{2}(\boldsymbol{n\alpha})}\psi \tag{1.2.74}$$

あるいは、この逆変換をとって

$$\psi = e^{\frac{\varphi}{2}(\boldsymbol{n\alpha})}\psi' \tag{1.2.75}$$

ここに normalize された ψ は (1.2.49) の $\psi(x)$ ではなく (1.2.53) の $u_{\pm p}$ である。($\psi(x)$ は $\overline{\psi}\psi = \pm m/\varepsilon$ で normalize されていない！) そこで (1.2.75) は

$$u_{\pm p} = (\cosh\frac{\varphi}{2} + \sinh\frac{\varphi}{2}(\boldsymbol{n\alpha}))u'_{\pm p} \tag{1.2.76}$$

である。ここに ${u'}_{\pm p}$ は静止系 (body-fixed system) $\mathcal{K}'$, $u_{\pm p}$ は実験室系 (laboratory system) $\mathcal{K}$ の波動函数である。そこで $\beta = V/c = \tanh\varphi$ から

$$\cosh\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\varphi+m}{2m}} \quad , \quad \sinh\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{\varphi-m}{2m}} \tag{1.2.77}$$

がわかる。従って (1.2.76) は、標準表示では

$$u_{\pm p} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon+m} & \sqrt{\varepsilon-m}(\boldsymbol{n\sigma}) \\ \sqrt{\varepsilon-m}(\boldsymbol{n\sigma}) & \sqrt{\varepsilon+m} \end{pmatrix} \frac{1}{2m} {u'}_{\pm p} \tag{1.2.78}$$

となる。ここで ${u'}_{\pm p}$ として (1.2.63) を取ると (1.2.61) と (1.2.62) が得られる。

(練習問題-2) ハミルトニアン $H = \alpha\boldsymbol{p} + \beta m$ の固有値方程式 $Hu_p = \varepsilon u_p$ から、unitary 変換 $U = e^{W(\boldsymbol{n\gamma})}$ によって H を対角化する表示を求めよ。この時、固有値方程式 $H\gamma^0 u_{-p} = -\varepsilon\gamma^0 u_{-p}$ はどの様に変換されるか？

(解答) $\boldsymbol{\gamma}^\dagger = -\boldsymbol{\gamma}$ より、実数 W に対して U は unitaery 変換である。そこで新しい表示による固有値方程式を $H'{u'}_p = \varepsilon {u'}_p$ とすると、$H' = UHU^{-1}$, ${u'}_p = Uu_p$ である。$(\boldsymbol{n\gamma})^2 = -1$ から

$$\begin{aligned} U &= \cos W + \sin W(\boldsymbol{n\gamma}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos W & \sin W(\boldsymbol{n\sigma}) \\ -\sin W(\boldsymbol{n\sigma}) & \cos W \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.2.79}$$

である。そこで ${u'}_p$ の下の成分を 0 になる様に選ぶと、$-\sin W\sqrt{\varepsilon+m} + \cos W\sqrt{\varepsilon-m}) = 0$ より

$$\tan W = \sqrt{\frac{\varepsilon-m}{\varepsilon+m}} = \frac{|\boldsymbol{p}|}{\varepsilon+m} \tag{1.2.80}$$

となる。そこで

$$\cos W = \sqrt{\frac{\varepsilon+m}{2\varepsilon}} \quad , \quad \sin W = \sqrt{\frac{\varepsilon-m}{2\varepsilon}} \tag{1.2.81}$$

より ${u'}_p$ の上の成分は $(\cos W\sqrt{\varepsilon+m} + \sin W\sqrt{\varepsilon-m})w = \sqrt{2\varepsilon}w$ となる。また H' は

$$H' = UHU^{-1} = U\gamma^0U^{-1}(|\boldsymbol{p}|U(\boldsymbol{n\gamma})U^{-1} + m) \tag{1.2.82}$$

を根気よく計算すると

$$\begin{aligned} U\gamma^0U^{-1} &= \frac{1}{\varepsilon}H \\ U(\boldsymbol{n\gamma})U^{-1} &= (\boldsymbol{n\gamma}) \end{aligned} \tag{1.2.83}$$

が得られる。そこで $H^2=(\alpha\boldsymbol{p}+\beta m)^2=\boldsymbol{p}^2+m^2=\varepsilon^2$ を使って

$$H'=UHU^{-1}=\frac{1}{\varepsilon}H^2\gamma^0=\varepsilon\gamma^0=\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & -\varepsilon\end{pmatrix} \tag{1.2.84}$$

が得られる。

$H\gamma^0u_{-p}=-\varepsilon\gamma^0u_{-p}$ に対しては、変換後の固有値方程式を $H'u'_{-p}=-\varepsilon u'_{-p}$ とすると

$$\begin{aligned}u'_{-p}=U\gamma^0u_{-p}&=\begin{pmatrix}\cos W & \sin W(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\\ -\sin W(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}) & \cos W\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\varepsilon-m}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})w'\\ -\sqrt{\varepsilon+m}w'\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}(\cos W\sqrt{\varepsilon-m}-\sin W\sqrt{\varepsilon+m})(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})w'\\ (-\sin W\sqrt{\varepsilon-m}-\cos W\sqrt{\varepsilon+m})w'\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}0\\ -\sqrt{2\varepsilon}w'\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1.2.85}$$

つまり、今度は上の 2 成分がゼロとなる。

Hamiltonian $H=\alpha\boldsymbol{p}+\beta m$ は Σ_z と可換ではないが、粒子の進行方向 $\boldsymbol{n}$ へのスピンの射影演算子 $\boldsymbol{n}\boldsymbol{\Sigma}$ とは可換である。これは $(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p})=(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{p})(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})=|\boldsymbol{p}|$ から容易にわかる。$(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})$ の固有値が $\pm1/2$ をもつ、いわゆる helicity 状態は 2-次元スピノールでは

$$(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})w^{\pm1/2}=\pm w^{\pm1/2} \tag{1.2.86}$$

で定義される。(1.2.64) の $w^{\pm1/2}$ は $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_z$ の時の $(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})=(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{\sigma})=\boldsymbol{\sigma}_z$ に対する固有状態である。つまり

$$\sigma_z\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad,\quad\sigma_z\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{1.2.87}$$

である。一般の場合は $\boldsymbol{n}$ の極座標を (θ,φ) として

$$(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})=\begin{pmatrix}n_z & (n_x+in_y)\\ (n_x-in_y) & -n_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{i\varphi}\\ \sin\theta e^{-i\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix} \tag{1.2.88}$$

を対角化して得られる。まず固有値 λ は固有方程式

$$\begin{vmatrix}\cos\theta-\lambda & \sin\theta e^{i\varphi}\\ \sin\theta e^{-i\varphi} & -\cos\theta-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{1.2.89}$$

から、容易に $\lambda=\pm1$ がわかる。固有ベクトルは、例えば $\lambda=1$ に対しては

$$\begin{pmatrix}\cos\theta-1 & \sin\theta e^{i\varphi}\\ \sin\theta e^{-i\varphi} & -\cos\theta-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=0 \tag{1.2.90}$$

よりただ一つの関係式 $(-\sin\theta/2e^{-i\varphi/2}a+\cos\theta/2e^{i\varphi/2}b)=0$ が得られる。ここから (任意の phase factor を除いて)

$$w^{1/2}=\begin{pmatrix}\cos\theta/2e^{i\varphi/2}\\ \sin\theta/2e^{-i\varphi/2}\end{pmatrix} \tag{1.2.91}$$

が得られる。同様にして

$$w^{-1/2}=\begin{pmatrix}-\sin\theta/2e^{i\varphi/2}\\ \cos\theta/2e^{-i\varphi/2}\end{pmatrix} \tag{1.2.92}$$

がわかる。

上の結果はまた (1.2.87) にオイラー角の空間回転演算子 (**??**) を作用することによっても得られる。まず

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\varphi,\theta,\psi)&=e^{-i\varphi s_z}e^{-i\theta s_y}e^{-i\psi s_z}\\ &=\begin{pmatrix}e^{-i\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\psi}{2}} & -e^{-i\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\psi}{2}}\\ e^{i\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\psi}{2}} & e^{i\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\psi}{2}}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1.2.93}$$

次に (**??**) - (**??**) で $L_z\rightarrow s_z, L_y\rightarrow s_y$

$$\boldsymbol{r}\rightarrow\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{pmatrix} \tag{1.2.94}$$

と変えて

$$\mathcal{R}(\varphi,\theta,\psi)\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{pmatrix}\mathcal{R}(\varphi,\theta,\psi)^{-1}=M(\varphi,\theta,\psi)\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cdots\\ \cdots\\ (\boldsymbol{n\sigma})\end{pmatrix} \tag{1.2.95}$$

より $\mathcal{R}(\varphi,\theta,\psi)\sigma_z\mathcal{R}(\varphi,\theta,\psi)^{-1}=(\boldsymbol{n\sigma})$ であることがわかる。そこで (1.2.87) の左から $\mathcal{R}(\varphi,\theta,\psi)^{-1}$ を掛けて、重要でない phase factor を除いて

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\varphi,\theta,\psi)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}&=e^{-i\frac{\psi}{2}}w^{1/2}\\ \mathcal{R}(\varphi,\theta,\psi)\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}&=e^{i\frac{\psi}{2}}w^{-1/2}\end{aligned} \tag{1.2.96}$$

であることがわかる。最後に (1.2.86) を用いると $u_{p,\sigma}$ は

$$(\boldsymbol{n\Sigma})u_{p,\sigma}=2\sigma u_{p,\sigma} \tag{1.2.97}$$

を満たすことがわかる。

2 ボソン系

今までスピン 0 の相対論的粒子は現われなかったが、自然界には後で示すようにスピン 0 の擬スカラー中間子である大変重要なパイ中間子 (π meson) が存在する。ここでは、まずスピン 0 の粒子の取り扱いとスピン 1 の粒子の取り扱いを簡単に概説する。相対論的関係式 $\varepsilon^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$ ($p^2 = m^2$) を満たす様なスカラー粒子の相対論的方程式は、$p^\mu = i\partial^\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu} = (i(\partial/\partial t), (1/i)\boldsymbol{\nabla})$ を 4-元運動量演算子として $(p^2 - m^2)\psi = 0$ つまり

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \tag{2.1}$$

で与えられることは、ほとんど明らかである。ここに、$\Box = \partial^\mu\partial_\mu = (\partial/\partial t)^2 - \boldsymbol{\nabla}^2$ はいわゆるダランベリアンである。(2.1) をクライン・ゴルドン (Klein-Gordon) 方程式という。この解は、平面波

$$\psi_p(x) = \eta\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}e^{-ipx} \tag{2.2}$$

である。ここに、基本単位系で $p = (p^0, \boldsymbol{p})$ の時 $p^2 = m^2$ から $\varepsilon = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} \geqq |m| > 0$ として常に $p^0 = \varepsilon > 0$ と仮定する。すなわち、常に $\psi_p(x)$ は粒子 ψ_{-p} は反粒子の波動函数を表わす。また η は phase factor で、P をパリティ反転演算子としてスカラー粒子に対しては $P\eta = 1$、擬スカラー粒子に対しては $P\eta = -1$ と約束する。(2.1) は様々の方法で辿り着くことができる。例えば、ψ^μ を介在して

$$m\psi^\mu = p^\mu\psi \quad , \quad m\psi = p_\mu\psi^\mu \tag{2.3}$$

とする。はじめの式に p_μ を掛けて二番目の式を使うと (2.1) が得られる。

また別の導き方は、ラグランジアン formalism を使う方法である。ラグランジアン密度を

$$\mathcal{L}(\psi, \psi^*) = \partial^\mu\psi^*\partial_\mu\psi - m^2\psi^*\psi \tag{2.4}$$

として、作用

$$S[\psi^*, \psi] = \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{L}d^4x \tag{2.5}$$

の変分を考える。ここに、ψ^* と ψ は独立変数と考える。まず ψ^* に対する変分を考えると、部分積分により

$$\delta S\left[\psi^*, \psi\right] = \delta\psi^*\partial\psi|_{x_0}^{\xi_1} - \int_{x_0}^{x_1} \delta\psi^*(\partial^\mu\partial_\mu\psi + m^2\psi)d^4x \tag{2.6}$$

が得られる。ここで $\psi^*(x_1)=\psi^*(x_0)=0$ と固定して ψ^* を任意に選ぶと $\delta S=0$ から (2.1) が得られる。ψ についての変分からは (2.1) の複素共役が得られるのみである。

ここで、四元場のラグランジアン formalism を簡単にまとめておく。一般に四元場の一つを $\psi_i=\psi_(x^\mu)$ とし、$\mathcal{L}$ は x^μ に陽には依存しないとして添え字 i については和を取るものとする。(2.5) の様に $S[psi]=\int_{x_0}^{x_1}\mathcal{L}(\psi,partial\psi)d^4x$ の $\delta\psi$ による変分を考える。

$$\delta\mathcal{L}(\psi,\partial\psi)=\delta\psi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}+\delta\partial^\mu\psi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)} \tag{2.7}$$

より部分積分して

$$\delta S=\delta\psi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu)}|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\delta\psi\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)}\right)d^4x \tag{2.8}$$

から、ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \tag{2.9}$$

が得られる。次にエネルギー・運動量テンソルを

$$T^\mu_\nu=\sum_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i)}\partial_\nu\psi_i-\mathcal{L}\delta^\mu_\nu \tag{2.10}$$

で定義すると

$$\partial_\mu T^\mu_\nu=0 \tag{2.11}$$

が得られる。実際、ラグランジアン方程式 (2.9) を使うと

$$\begin{aligned}\partial_\mu T^\mu_\nu&=\sum_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_i}\partial_\nu\psi_i+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i)}\partial_\mu\partial_\nu\psi_i\right)-(\partial_\mu\mathcal{L})\delta^\mu_\nu\\&=\sum_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial x^\nu}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_i)}\frac{\partial(\partial_\mu\psi_i)}{\partial x^\nu}\right)-(\partial_\mu\mathcal{L})\delta^\mu_\nu\\&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\nu}-\partial_\nu\mathcal{L}=0\end{aligned} \tag{2.12}$$

が示せる。系のエネルギーと運動量は

$$P^\mu=\int T^\mu_0 dV \tag{2.13}$$

であり、これらは

$$\partial_\mu P^\mu=0 \tag{2.14}$$

を満たす。(2.4) のラグランジアンに対して、$\psi_i(i=1,2)=\psi,\psi^*$ としてこれらを計算すると

$$\begin{aligned} T^{00} &= \partial^0\psi^*\partial^0\psi + \partial^0\psi\partial^0\psi^* - \mathcal{L} \\ &= \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} + (\boldsymbol{\nabla}\psi^*)(\boldsymbol{\nabla}\psi) + m^2\psi^*\psi \\ T^{i0} &= \frac{\partial\psi^*}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial dt} + \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi^*}{\partial t} \end{aligned} \tag{2.15}$$

そこで、平面波解 (2.2) を用いてエネルギーを計算すると

$$E = P^0 = \int T^{00}dV = \frac{1}{2\varepsilon}(\varepsilon^2 + \boldsymbol{p}^2 + m^2) = \varepsilon \tag{2.16}$$

すなわち、(2.2) は単位体積 $V=1$ あたり粒子一個の割合で normalize されている。

作用 S の変分の特別の場合として、変換 $\psi(x)\rightarrow\psi'(x)=e^{i\varepsilon}\psi(x)$ (ε は real (実数) な微小量) に対応して $\delta\psi(x)=[e^{i\varepsilon}-1]\psi(x)=i\varepsilon\psi(x)$ とする。この変分に対して ($\delta S=0$ だけでなく) ラグランジアン CL 自体が不変とする。この時、「ラグランジアンは場の Global 位相変換に対して不変」といい、保存する current と charge が存在する。まず $\mathcal{L}(\psi)$ の変分は、ラグランジュ方程式を用いて

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\psi}\delta\partial^\mu\psi = (\partial^\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)})(\delta\psi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\psi}\delta\partial^\mu\psi \\ &= \partial^\mu[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)}(\delta\psi)] = i\varepsilon\partial^\mu[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)}\psi] \end{aligned} \tag{2.17}$$

そこで、$\psi(x)\rightarrow\psi'(x)=e^{i\varepsilon}\psi(x)$ の変換に対して不変な (2.4) の $\mathcal{L}(\psi,\psi^*)$ に対しては $\delta\psi^*=-i\varepsilon\psi^*$ より

$$\delta\mathcal{L} = i\varepsilon\partial^\mu[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)}\psi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi^*)}\psi^*] = 0 \tag{2.18}$$

current には定数計数の不定性があるので、(2.19) の最後の $[\cdots]$ に $-i$ を掛けて real にしておくと

$$\begin{aligned} j_\mu &= -i[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)}\psi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi^*)}\psi^*] \\ &= i[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi^*)}\psi^* - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)}\psi] \end{aligned} \tag{2.19}$$

として

$$\partial^\mu j_\mu = 0 \tag{2.20}$$

が成り立つ。(2.4) の $\mathcal{L}(\psi, \psi^*)$ に対してこれらを計算するとった。(2.20) の意味は、通常の流れの密度 $j^\mu = (\rho, \boldsymbol{j})$ に対する連続の式 $\partial_\mu j^\mu = 0$ との類推から明らかになる。すなわち、この時

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{j} = 0 \tag{2.21}$$

そこで "電荷" Q を $Q = \int \rho dV$ で定義すると

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \int \mathrm{div}\boldsymbol{j} dV = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = -\int \boldsymbol{j} d\boldsymbol{f} \tag{2.22}$$

同様に (**??**) から

$$Q = \int j^0 dV = i \int [\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi] dV \tag{2.23}$$

とすると、(2.22) が成り立つ。しかし、Q は real ではあるが一般には正定値 (positive definate) ではない。保存量 Q の存在はいわゆるネーター (Noether) の定理の一つの例である。あとで見る様に、スピン 0 を持つ boson もスピン 1/2 の時の Dirac 粒子の時の様に $m > 0$ の時の粒子と $m < 0$ の時の反粒子が存在する。粒子に対しては $Q > 0$、反粒子に対しては $Q < 0$ である。

これまでスピン 0 の複素スカラー場を考えてきたが、$\psi^* = \psi$ を満たす実スカラー場を考えることもできる。この場合、自由度は半分だから

$$\mathcal{L}(\psi) = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu \psi \partial_\mu \psi - m^2 \psi^2\right) \tag{2.24}$$

のラグランジアンを考える。この場合もラグランジュ方程式は (2.9) で与えられるが、(**??**) の様な保存する current j^μ は存在しない。

複素スカラー場に戻って、電磁波の第二量子化で定義した様に場の演算子 $\boldsymbol{\psi}(x)$ を平面波 (2.2) で展開し

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}(x) &= \sum_{\boldsymbol{p}} \left(a_{\boldsymbol{p}} \psi_p(x) + b^\dagger_{\boldsymbol{p}} \psi_{-p}(x)\right) \\ &= \sum_{\boldsymbol{p}} \eta \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(a_{\boldsymbol{p}} e^{-ipx} + b^\dagger_{\boldsymbol{p}} e^{ipx}\right)\end{aligned} \tag{2.25}$$

ここに、パリティ反転 P に対する効果 $\eta = \pm 1$ を第二量子化演算子の方に含ませて $\eta a_{\boldsymbol{p}} \to a_{\boldsymbol{p}}, \eta b_{\boldsymbol{p}} \to b_{\boldsymbol{p}}$ と書くことにすると

$$\boldsymbol{\psi}(x) = \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(a_{\boldsymbol{p}} e^{-ipx} + b^\dagger_{\boldsymbol{p}} e^{ipx}\right) \tag{2.26}$$

として

$$P : a_{\boldsymbol{p}} \to \pm\, a_{-\boldsymbol{p}} \quad , \quad b_{\boldsymbol{p}} \to \pm\, b_{-\boldsymbol{p}} \tag{2.27}$$

である。また (2.26) でこの変換を行なって、$\boldsymbol{p}$-sum の符号を変えると

$$(\boldsymbol{\psi}(x))^P = \pm\boldsymbol{\psi}(t, -\boldsymbol{x}) \tag{2.28}$$

特に、スピン 0 のボソンの内部偶奇性は粒子と反粒子で同じである。$\boldsymbol{a_k}$ と $\boldsymbol{b_k^\dagger}$ は、それぞれ粒子の消滅演算子と反粒子の生成演算子で、次の boson-type の正準交換関係を満たす。

$$[a_{\boldsymbol{p}}, a^\dagger_{\boldsymbol{p}'}] = \delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'} \quad , \quad [b_{\boldsymbol{p}}, b^\dagger_{\boldsymbol{p}'}] = \delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'} \tag{2.29}$$

それ以外の、$a_{\boldsymbol{p}}, a^\dagger_{\boldsymbol{p}'}$ と $b_{\boldsymbol{p}}, b^\dagger_{\boldsymbol{p}'}$ の間の交換関係はすべてゼロである。(2.26) の hermite conjugate は

$$\boldsymbol{\psi}^\dagger(x) = \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(a^\dagger_{\boldsymbol{p}} e^{ipx} + b_{\boldsymbol{p}} e^{-ipx} \right) \tag{2.30}$$

であり、当然のことながら $\boldsymbol{\psi}^\dagger(x) \neq \boldsymbol{\psi}(x)$ である。

(2.7) - (2.11) を使って第二量子化表示の場のラグランジアン formalism を、古典場の場合と同様作り上げることが出来る。この場合、ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}^\dagger) = (\partial^\mu \boldsymbol{\psi}^\dagger)\partial_\mu \boldsymbol{\psi} - m^2 \boldsymbol{\psi}^\dagger \boldsymbol{\psi} \tag{2.31}$$

で、ラグランジュ方程式 (2.9) は運動方程式

$$(\Box + m^2)\boldsymbol{\psi}(x) = 0 \tag{2.32}$$

を与える。(2.26) は実際この式を満たしている。

(2.31) を使って (2.10) から $E = P^0$ を計算し、それを H と置くと

$$\begin{aligned}
H = \int T^{00} dV &= \int \left[\frac{\partial \boldsymbol{\psi}^\dagger}{\partial t} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial t} - (\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{\psi}^\dagger)\boldsymbol{\psi}) + m^2 \boldsymbol{\psi}^\dagger \boldsymbol{\psi} \right] dV \\
&= \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{2\varepsilon} (\varepsilon^2 + \boldsymbol{p}^2 + m2)(a^\dagger_{\boldsymbol{p}} a_{\boldsymbol{p}} + b_{\boldsymbol{p}} b^\dagger_{\boldsymbol{p}}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{p}} \varepsilon (a^\dagger_{\boldsymbol{p}} a_{\boldsymbol{p}} + b_{\boldsymbol{p}} b^\dagger_{\boldsymbol{p}}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{p}} \varepsilon (a^\dagger_{\boldsymbol{p}} a_{\boldsymbol{p}} + b^\dagger_{\boldsymbol{p}} b_{\boldsymbol{p}} + 1)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

(注意) 最初の行で部分積分によって $(\boldsymbol{\nabla\psi}^\dagger)(\boldsymbol{\nabla\psi}) \to -(\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{\psi}^\dagger)\boldsymbol{\psi})$ としたのは、そのままでは $\sum_{\boldsymbol{p}}$ が発散を含むからである。この事情は、電磁波の第二量子化のところで $(\mathrm{rot}\boldsymbol{A})(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}^*) \to -(\nabla^2\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^*$ としたのと同様である。((3.32) 参照、そこでは $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*$ である。) これにより、粒子と反粒子との cross term の符号が変わるので cross term $\sim_{\boldsymbol{p}} (-\varepsilon^2+\boldsymbol{p}^2+m^2)(a^\dagger_{\boldsymbol{p}}b^\dagger_{-\boldsymbol{p}}+b_{\boldsymbol{p}}a_{-bp})=0$ となる。

同様に

$$
\begin{aligned}
P^i = \int T^{i0}dV &= \int\left[\frac{\partial\boldsymbol{\psi}^\dagger}{\partial x_i}\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial dt}+\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial x_i}\frac{\partial\boldsymbol{\psi}^\dagger}{\partial t}\right]dV = \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{\boldsymbol{k}}2k^i\varepsilon(a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}+b_{\boldsymbol{k}}b^\dagger_{\boldsymbol{k}}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}} k^i(a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}+b_{\boldsymbol{k}}b^\dagger_{\boldsymbol{k}}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}} k^i(a^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}}+b^\dagger_{\boldsymbol{k}}b_{\boldsymbol{k}}+1) \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

今度は cross term は $\sum_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{p}(b_{-\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}+a^\dagger_{-bp}b^\dagger_{\boldsymbol{p}})+h.c.=\sum_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{p}(a^\dagger_{\boldsymbol{p}}b^\dagger_{-bp}+a^\dagger_{-bp}b^\dagger_{\boldsymbol{p}}+b_{-bp}a_{\boldsymbol{p}}+b_{\boldsymbol{p}}a_{-bp})=0$ である。ここに、最後の式が $\boldsymbol{p}\to-\boldsymbol{p}$ で符号を変えることを使った。最後に (2.23) の charge からは

$$
\begin{aligned}
Q = \int j^0 dV &= i\int\left[\boldsymbol{\psi}^\dagger\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial t}-\frac{\partial\boldsymbol{\psi}^\dagger}{\partial t}\psi\right]dV \\
&= \sum_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{2\varepsilon}2\varepsilon(a_{\boldsymbol{p}}a^\dagger_{\boldsymbol{p}}-b^\dagger_{\boldsymbol{p}}b_{\boldsymbol{p}}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{p}}\left(a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}-b^\dagger_{\boldsymbol{p}}b_{\boldsymbol{p}}\right) \qquad (2.35)
\end{aligned}
$$

が得られる。粒子数演算子 $a^\dagger_{\boldsymbol{p}}a_{\boldsymbol{p}}, b^\dagger_{\boldsymbol{p}}b_{\boldsymbol{p}}$ 固有値をそれぞれ $N_{\boldsymbol{p}}, \overline{N}_{\boldsymbol{p}} \geqq 0$ として粒子と反粒子の個数とすると、これらの結果は

$$
\begin{aligned}
E &= \sum_{\boldsymbol{p}}\varepsilon(N_{\boldsymbol{p}}+\overline{N}_{\boldsymbol{p}}+1) \\
\boldsymbol{P} &= \sum_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{p}(N_{\boldsymbol{p}}+\overline{N}_{\boldsymbol{p}}+1) \\
Q &= \sum_{\boldsymbol{p}}(N_{\boldsymbol{p}}-\overline{N}_{\boldsymbol{p}}) \qquad (2.36)
\end{aligned}
$$

と表わされる。ここでも、E と $\boldsymbol{P}$ は無限大の発散量を含んでいる。

他の式も、全て同様に導かれる。例えば (2.31) のラグランジアン密度は、ゲージ変換

$$
\boldsymbol{\psi}(x) \to e^{i\varepsilon}\boldsymbol{\psi}(x) \qquad (\varepsilon = \mathrm{real}) \qquad (2.37)
$$

に対して不変である。この時、不変量 Q (2.36) が存在する。これは、もっと一般的な Noether の定理の一例である。また特に $b_{\boldsymbol{p}} = a_{\boldsymbol{p}}$ の時、$\boldsymbol{\psi}^\dagger = \boldsymbol{\psi}$ で (2.31) は

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{2}(\partial^\mu \boldsymbol{\psi} \partial_\mu \boldsymbol{\psi} - m^2 \boldsymbol{\psi}^2) \tag{2.38}$$

となる。この時 $N_{\boldsymbol{p}} = \overline{N}_{\boldsymbol{p}}$ で自分自身が反粒子で (2.36) から $Q = 0$ である。この時、粒子は真性中性であるという。光子は $\boldsymbol{A}^\dagger = \boldsymbol{A}$ であるから、真性中性である。あとで出てくるパイ中間子は擬スカラー粒子であるが、荷電パイ中間子 $\pi^\pm$ はお互いに粒子、反粒子の関係にある。一方、電荷を持たない中性パイ中間子 π^0 は真性中性粒子であり自分自身が反粒子である。粒子と反粒子は対消滅して光子の形でエネルギーを放出するが、真性中性粒子はそれ自身で対消滅することはない。(π^0 は電磁相互作用により main に 2γ に崩壊する。) 粒子を反粒子に変える変換は荷電共役変換 (charge conjugation) と言われ、一般に C で表わされる。反粒子の考え方は 1928 年に Paul Dirac により見出された。それは 1932 年にアンダーソンによって陽電子 e^+ が実験的に見出される遥か以前の事であった。

これまでスピン 0 の相対論的粒子を論じてきたが、スピン 1 や更に高次の整数次をもったボソンももちろん存在する。60 年代の初頭に発見されたベクトル中間子はスピン 1 を持つ粒子である。この場合、スピン 1 を持つ電磁波に倣って (2.3) を拡張して次の様な方程式を作ることが出来る。(mass $m \neq 0$ のスピン 1 の粒子の満たすべき方程式を Proca 方程式という。)

$$im\psi^{\mu\nu} = p^\mu \psi^\nu - p^\nu \psi^\mu \quad , \quad im\psi^\nu = p_\mu \psi^{\mu\nu} \tag{2.39}$$

ここに、始めの式は $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$、二番目の式は $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ の類推である。一番目の式から $m \neq 0$ より、$\psi^{\mu\nu} = -\psi^{\nu\mu}$ (反対称) がわかる。また、ここから $\partial_\nu \psi^\nu = 0$ が導かれる。これは、電磁波の時のゲージ不変性 $\partial_\mu A^\mu = 0$ に対応する。一番目の式を二番目の式に代入してこれを使うと

$$(\Box + m^2)\psi^\mu = 0 \tag{2.40}$$

すなわち、ψ^μ の四つの各成分はそれぞれ Klein-Gordon 方程式を満たす。スピン $S = 1$ の粒子は $S_z = \pm 1, 0$ の三つの独立成分を持つので、ψ^μ の四つの成分のうち一つは余分である。条件 $\partial_\mu \psi^\mu = 0$ は、この一つの成分を除去するための補助条件である。これをもろに示すために、(2.40) の平面波の解を

$$\psi^\mu_{\boldsymbol{p}\lambda}(x) = \eta \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u^\mu_{\boldsymbol{p}\lambda} e^{-ipx} \tag{2.41}$$

とする。ここに、$u^{\mu}_{\boldsymbol{p}\lambda}$ は運動量 $\boldsymbol{p}$、スピン成分 $\lambda=\pm1,0$ を持つスピン函数の四元成分であって、$(\boldsymbol{n}\boldsymbol{S})\boldsymbol{e}^{(\lambda)}=\lambda e^{(\lambda)}$ を満たす (3.22) の三次元複素偏極ベクトル $\boldsymbol{e}^{(\lambda)}$ を用いて

$$u_{\boldsymbol{p},0}=\left(\frac{|p|}{m},\frac{\varepsilon}{m}\boldsymbol{e}^{(0)}\right)\quad,\quad u_{\boldsymbol{p},\pm1}=\left(0,\boldsymbol{e}^{(\pm1)}\right) \tag{2.42}$$

と表わされる。この時

$$\partial_{\mu}\psi^{\mu}_{\boldsymbol{p}\lambda}=0 \qquad (\lambda=\pm1,0) \tag{2.43}$$

が成り立つ。実際 $\boldsymbol{e}^{(0)}=\boldsymbol{e}_{\zeta}=\boldsymbol{n}=\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ から

$$\begin{aligned}&\frac{|p|}{m}(-i\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{m}\boldsymbol{e}^{(0)}(i\boldsymbol{p})=0\\&\boldsymbol{e}^{(\pm1)}\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{n}\boldsymbol{e}^{(\pm1)})|\boldsymbol{p}|=0\end{aligned} \tag{2.44}$$

である。ここに $m\neq0$ から電磁波の場合と違って $\boldsymbol{e}^{(0)}=\boldsymbol{e}_{\zeta}=\boldsymbol{n}$ の縦波成分が存在する。また、(2.39) の $u^{\mu}_{\boldsymbol{k}\lambda}$ は $\boldsymbol{e}^{(\lambda)}\boldsymbol{e}^{(\lambda')^*}=\delta_{\lambda,\lambda'}$ から

$$u^{\mu}_{\boldsymbol{p}\lambda}u^{\mu}_{\boldsymbol{p}\lambda'}=-\delta_{\lambda,\lambda'} \tag{2.45}$$

を満たす。

3 電磁波の量子化

電磁波は波動的性質を持っているため、それ自体量子力学的側面を持っている。以下に見る様に、波動ベクトルの離散化の手順を経て電磁波は無限次元調和振動子の集まりとして記述される。すでに古典的調和振動子の量子化のところで見たように、電磁波の量子化は電磁波の量子である光子の占有数表示を量子力学的状態とするいわゆる第二量子化の定式化へと自然に繋がっていく。

まず古典的電磁波の定式化から出発する。基礎となるのは 4-元ポテンシャル $A^{\mu}=(\varphi,\boldsymbol{A})$ であるが、(5.3.22) のゲージ変換によつて常に $\varphi=$ と取ることができる。そこでローレンツ条件は

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0 \tag{3.1}$$

また $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ は

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\quad,\quad\boldsymbol{H}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A} \tag{3.2}$$

より得られる。電磁波のエネルギー H と Poynting vector § は

$$H=\int\frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{H}^2)dV\quad,\quad\boldsymbol{S}=\int\frac{1}{4\pi}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}]dV \tag{3.3}$$

で与えられる。ここで体積 V は有限だが、十分大きな体積について取るものとする。ここでは便宜上 $V=1$ とする。ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を平面波で展開して、連続変数 $\boldsymbol{k}$ を無限個の離散変数とする。これを

$$\boldsymbol{A} = \sum \boldsymbol{k} \left(\boldsymbol{a_k} e^{i\boldsymbol{kr}} + \boldsymbol{a_k}^* e^{-i\boldsymbol{kr}} \right) \tag{3.4}$$

と書く。$\sum_{\boldsymbol{k}}$ の連続極限は $\int d^3\boldsymbol{k}/(2\pi)^3$ である。ローレンツ条件は $\boldsymbol{k}\boldsymbol{a_k}=0$ と表わされる。$\boldsymbol{a_k}$ と $\boldsymbol{a_k}^*$ の時間依存性は $\omega = |\boldsymbol{k}|$ としてそれぞれ $e^{-i\omega t}$ と $e^{i\omega t}$ である。ここでは、常に $\hbar = c = 1$ の絶対単位系を用いる。

$\boldsymbol{a_k}$, $\boldsymbol{a_k}^*$ から正準変数 $\boldsymbol{Q_k}$, $\boldsymbol{P_k}$ への変換は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q_k} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\boldsymbol{a_k} + \boldsymbol{a_k}^* \right) \\ \boldsymbol{P_k} = \dot{\boldsymbol{Q}}_{\boldsymbol{k}} &= \frac{-i\omega}{\sqrt{4\pi}} \left(\boldsymbol{a_k} - \boldsymbol{a_k}^* \right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

によって実現される。$\boldsymbol{Q_k}, \boldsymbol{P_k}$ はいずれも実数である。また $\dot{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{k}} = -\omega^2 \boldsymbol{Q_k}$ が成り立つ。(**??**) の逆変換は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_k} &= \sqrt{\pi} \left(\boldsymbol{Q_k} + \frac{i}{\omega} \boldsymbol{P_k}^* \right) \\ \boldsymbol{a_k}^* &= \sqrt{\pi} \left(\boldsymbol{Q_k} - \frac{i}{\omega} \boldsymbol{P_k}^* \right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

となる。これを (**??**) に代入して

$$\boldsymbol{A} = \sqrt{4\pi} \sum \boldsymbol{k} \left(\boldsymbol{Q_k} \cos \boldsymbol{kr} - \frac{1}{\omega} \boldsymbol{P_k} \sin \boldsymbol{kr} \right) \tag{3.7}$$

が得られる。これらを使って (**??**) の H は

$$\begin{aligned} H &= \int \frac{1}{8\pi} (\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2) dV = \frac{1}{8\pi} \int \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right)^2 - (\Delta \boldsymbol{A}) \boldsymbol{A} \right] dV \\ &= \frac{1}{2} \int \left[\left(\sum_{\boldsymbol{k}} (\boldsymbol{P_k} \cos \boldsymbol{kr} + \omega \boldsymbol{Q_k} \sin \boldsymbol{kr}) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{\boldsymbol{k}} (\omega^2 (\boldsymbol{Q_k} \cos \boldsymbol{kr} - \frac{1}{\omega} \boldsymbol{P_k} \sin \boldsymbol{kr}) \right)^2 \right] dV \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}} \left(\boldsymbol{P_k}^2 + \omega^2 \boldsymbol{Q_k}^2 \right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

となる。一行目の $[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}]^2\to-(\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}$ の負符号は、部分積分による。またここで三角関数の直交性

$$
\begin{aligned}
&\int e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\boldsymbol{r}}dV=\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\\
&\int\cos\boldsymbol{kr}\cos\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}dV=\int\sin\boldsymbol{kr}\sin\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}dV=\frac{1}{2}\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

を使った。同様に $\boldsymbol{S}$ は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S}&=\int\frac{1}{4\pi}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^2]dV=-\frac{1}{4\pi}\int[\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\times[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}]]dV\\
&=\int\left[\left(\sum_{\boldsymbol{k}}(\omega\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{k}}\sin\boldsymbol{kr}+\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k}}\cos\boldsymbol{kr})\right)\right.\\
&\quad\left.\times\left[\left(\sum_{\boldsymbol{k}}\times(\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{k}}\sin\boldsymbol{kr}+\frac{1}{\omega}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k}}\cos\boldsymbol{kr})\right)\right]\right]dV\\
&=\boldsymbol{n}\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}\left(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k}}{}^2+\omega^2\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{k}}{}^2\right)
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

ここに $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}/\omega$ $(\omega=|\boldsymbol{k}|)$ は波の進行方向で、横波条件 $(\boldsymbol{nP})=(\boldsymbol{nQ})$ と公式 $[ba\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]]=(\boldsymbol{ac})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}$ を使った。(3.8) は電磁波が無限個の調和振動子と同値であることを示している。実際は電磁波は横波で進行方向 $\boldsymbol{n}$ に垂直な方向にそれぞれ二つの偏向成分を持っている。これらの偏向方向への単位ベクトルを $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$ $(\alpha=\pm1)$ とすると、$(\boldsymbol{e}^{+1}\boldsymbol{e}^{-1})=0$ で、$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k}}=\sum_{\alpha=\pm1}P_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{e}^{(\alpha)},\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{k}}=\sum_{\alpha=\pm1}Q_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$ と展開される。そこで (3.8) - (3.10) は

$$
\begin{aligned}
H&=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\alpha}\left(P_{\boldsymbol{k}\alpha}{}^2+\omega^2Q_{\boldsymbol{k}\alpha}{}^2\right)\\
\boldsymbol{S}&=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{n}\left(P_{\boldsymbol{k}\alpha}{}^2+\omega^2Q_{\boldsymbol{k}\alpha}{}^2\right)
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

となる。

正準量子化の手法に従って運動量演算子を $P_{\boldsymbol{k}\alpha}=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial Q_{\boldsymbol{k}\alpha}}$ と定義して、正準交換関係を

$$
[P_{\boldsymbol{k}\alpha},Q_{\boldsymbol{k}\alpha}]=P_{\boldsymbol{k}\alpha}Q_{\boldsymbol{k}\alpha}-Q_{\boldsymbol{k}\alpha}P_{\boldsymbol{k}\alpha}=\frac{1}{i}
\tag{3.12}
$$

とする。異なる量子数 $(\boldsymbol{k}\alpha)$ を持つ変数は、すべて独立であり互いに可換である。(**??**) のハミルトニアン H の固有状態は無限個の Hermite 多項式の積、固有値は $N_{\boldsymbol{k}\alpha}=$

$0, 1, 2, \cdots$ を $\boldsymbol{k}\alpha$ 状態の占有数として

$$E = \sum_{\boldsymbol{k}\alpha} \omega \left(N_{\boldsymbol{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right) \tag{3.13}$$

で与えられる。

一次元調和振動子の量子化のところですでに見た様に、占有数表示への移行は第二量子化演算子

$$\begin{aligned} c_{\boldsymbol{k}\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\omega Q_{\boldsymbol{k}\alpha} + i P_{\boldsymbol{k}\alpha} \right) \\ c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\omega Q_{\boldsymbol{k}\alpha} - i P_{\boldsymbol{k}\alpha} \right) \end{aligned} \tag{3.14}$$

によって行われる。(3.12) の正準交換関係は

$$\left[c_{\boldsymbol{k}\alpha}, c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\alpha} \right] = 1 \tag{3.15}$$

となる。(**??**) の逆変換は

$$\begin{aligned} Q_{\boldsymbol{k}\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(c_{\boldsymbol{k}\alpha} + c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\alpha} \right) \\ P_{\boldsymbol{k}\alpha} &= -i \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(c_{\boldsymbol{k}\alpha} - c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\alpha} \right) \end{aligned} \tag{3.16}$$

である。そこで第二量子化表示でのハミルトニアンと Poynting vector は

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}\alpha} \omega \left(c_{\boldsymbol{k}\alpha} c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\alpha} + c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\alpha} c_{\boldsymbol{k}\alpha} \right) = \sum_{\boldsymbol{k}\alpha} \omega \left(c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\alpha} c_{\boldsymbol{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right) \\ \boldsymbol{S} &= \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}\alpha} \boldsymbol{k} \left(c_{\boldsymbol{k}\alpha} c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\alpha} + c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\alpha} c_{\boldsymbol{k}\alpha} \right) = \sum_{\boldsymbol{k}\alpha} \boldsymbol{k} \left(c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\alpha} c_{\boldsymbol{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

となる。(3.13) の固有値への移行は $c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\alpha} c_{\boldsymbol{k}\alpha} \rightarrow N_{\boldsymbol{k}\alpha}$ の置き換えによって得られる。また $\boldsymbol{S} = \sum_{\boldsymbol{k}\alpha} \boldsymbol{k} \left(N_{\boldsymbol{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right)$ である。これらの式はいずれも量子電磁気学に固有なゼロポイントエネルギーに結びついた発散項を含んでいる。ゼロでない $Q_{\boldsymbol{k}\alpha}$ の行列要素は (**??**) (すなわち (3.4.38)) より

$$\langle N_{\boldsymbol{k}\alpha} - 1 | c_{\boldsymbol{k}\alpha} | N_{\boldsymbol{k}\alpha} \rangle = \left\langle N_{\boldsymbol{k}\alpha} \middle| c^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\alpha} | N_{\boldsymbol{k}\alpha} - 1 \right\rangle = \sqrt{\frac{N_{\boldsymbol{k}\alpha}}{2\omega}} \tag{3.18}$$

ここから、ゼロでない $Q_{\boldsymbol{k}\alpha}$ の行列要素は (3.16) より

$$\langle N_{\boldsymbol{k}\alpha} - 1 | Q_{\boldsymbol{k}\alpha} | N_{\boldsymbol{k}\alpha} \rangle = \langle N_{\boldsymbol{k}\alpha} | Q_{\boldsymbol{k}\alpha} | N_{\boldsymbol{k}\alpha} - 1 \rangle = \sqrt{\frac{N_{\boldsymbol{k}\alpha}}{2\omega}} \tag{3.19}$$

が得られる。これは、(**??**) - (**??**) から得られる $\langle n-1|x|n\rangle = \langle n|x|n-1\rangle = \sqrt{n/2\omega}$ と consistent である。(3.4) の $\boldsymbol{A}$ を第二量子化演算子 (3.14) で書くために、$\boldsymbol{a_k}$ も偏極ベクトル (polalization vector) $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$ で展開し $\boldsymbol{a_k} = \sum_\alpha a_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$ として、$a_{\boldsymbol{k}\alpha} \to \sqrt{4\pi/2\omega}c_{\boldsymbol{k}\alpha}$ と置き換える。

$$\boldsymbol{A} = \sum_{\boldsymbol{k}\alpha}\left(c_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha} + c^\dagger_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{A}_b^{\boldsymbol{k}\alpha}k^*\right) \tag{3.20}$$

ここに

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha} = \sqrt{4\pi}\frac{\boldsymbol{e}^{(\alpha)}}{2\omega}e^{i\boldsymbol{kr}} \tag{3.21}$$

である。(3.4) の $\boldsymbol{A}$ は実ベクトルであり $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ も同様に実ベクトルであるが、そのフーリエ係数 $\boldsymbol{a_k}$ は一般に複素数である。しかし展開 $\boldsymbol{a_k} = \sum_\alpha a_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$ では、これを波動の進行方向 $\boldsymbol{n}$ に垂直な互いに直交する実ベクトル $\boldsymbol{e}^\alpha$ で展開している。一方、第二量子化の演算子 (3.20) の $\boldsymbol{A}$ は一般に複素ベクトルであり、$\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$ も $\boldsymbol{n}$ に直交する複素ベクトルと考える。この場合の偏極ベクトル z (polarization vector) は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}^{(1)} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_\xi + i\boldsymbol{e}_\eta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\\ 0\end{pmatrix}\\
\boldsymbol{e}^{(-1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_\xi - i\boldsymbol{e}_\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\\ 0\end{pmatrix}\\
\boldsymbol{e}^{(0)} &= \boldsymbol{e}_\zeta = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

で与えられる。ここに $\mathcal{K}' = (\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}_\zeta)$ は実験室系 (laboratory frame) $\mathcal{K} = (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ とは違って、動いている粒子 (ここでは光子) に結び付いた静止系 (rest frame) $\mathcal{K}'$ の単位ベクトルで右手系の実 3-次元直交ベクトル空間を張っている。実際には、光子は質量 $m = 0$ で光速 c で飛翔しており光子に結びついた静止系なるものは存在しないが、ここでは便宜上 $|\boldsymbol{v}| < c$ の時のローレンツ変換の時の記法をそのまま使うことにする。 特に $\boldsymbol{e}_\zeta = \boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/\omega$ $(\omega = |\boldsymbol{k}|)$ である。また、ここから $(\boldsymbol{n}\boldsymbol{e}_\xi) = (\boldsymbol{n}\boldsymbol{e}_\eta) = 0$ かつ

$$(\boldsymbol{e}^{(\alpha)}\boldsymbol{e}^{(\alpha')}*) = \delta_{\alpha,\alpha'} \tag{3.23}$$

である。そこで (3.21) より

$$\int(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}'\alpha'}{}^*)dV = \frac{4\pi}{2\omega}\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\delta_{\alpha,\alpha'} \tag{3.24}$$

が成り立つ。また $\alpha = \pm 1$ に対しては $(\boldsymbol{e}^{(\alpha)}\boldsymbol{e}^{(\alpha')} = -\delta_{\alpha,-\alpha'}$ であることから

$$\int (\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}'\alpha'})dV = -\frac{4\pi}{2\omega}\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'}\delta_{\alpha,-\alpha'} \tag{3.25}$$

も成り立つ。後で見る様に (3.20) の $\boldsymbol{A}$ の時間依存性は、実際には第二量子化演算子の $c_{\boldsymbol{k}\alpha}$ が担っていてハイゼンベルグ表示では $c_{\boldsymbol{k}\alpha}(t) = e^{iHt}c_{\boldsymbol{k}\alpha}e^{-iHt} = e^{-i\omega t}c_{\boldsymbol{k}\alpha}$ である。そこで、この factor を $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha}$ に含ませて (3.21) を

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha} = \sqrt{4\pi}\frac{\boldsymbol{e}^{\alpha}}{2\omega}e^{-i(\omega t - \boldsymbol{kr})} \tag{3.26}$$

としておくと便利である。また (3.2) に従って

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha} = i\omega\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha} \quad , \quad \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\alpha} = [\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha}] \tag{3.27}$$

と定義しておくと、$(\boldsymbol{n}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha}) = 0$ から $(\boldsymbol{n}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha}) = (\boldsymbol{n}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\alpha}) = (\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\alpha}) = 0$ が成り立つ。従って、$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha}, \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\alpha}, \boldsymbol{n}$ は互いに直交する右手系を形成する。(3.24) を用いて (3.26) は

$$\frac{1}{4\pi}\int \left[(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}'\alpha'}{}^{*}) + (\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}'\alpha'}{}^{*})\right]dV = \omega\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\delta_{\alpha,\alpha'} \tag{3.28}$$

と normalize されていることがわかる。(左辺の二項の寄与は、$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}'$ であることから $(\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{H}^{*}_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\alpha}}) = ([\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha}]\,[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}^{*}_{\boldsymbol{k}\alpha}]) = (\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{E}^{*}_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\alpha}})$ で同じである。) 複素共役を取らないものに対しては (3.24) から

$$\int (\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}'\alpha'})dV = (2\pi\omega)\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'}\delta_{\alpha,-\alpha'} \tag{3.29}$$

また $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\alpha}$ に対しては $\boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{k}$ 以外 non-zero だから $\boldsymbol{n}' = -\boldsymbol{n}$ と置いて

$$\begin{aligned}
\int (\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}'\alpha'})dV = \int (\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\alpha}'}) &= \int ([\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}'\alpha'}]\,[\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}'\alpha'}])dV \\
&= -\int (\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}'\boldsymbol{\alpha}'})dV \\
&= -(2\pi\omega)\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'}\delta_{\alpha,-\alpha'}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

となる。そこで、結局

$$\frac{1}{4\pi}\int \left[(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}'\alpha'}) + (\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}'\alpha'})\right]dV = 0 \tag{3.31}$$

となる。

(3.20) の $\boldsymbol{A}$ を用いて第二量子化表示のハミルトニアンを求めると (3.8) と同様にして

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2 - (\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}\right]dV \\
&= \frac{1}{8\pi}\int\left[-\left(\sum_{\boldsymbol{k}\alpha}\omega(c_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha} - c^\dagger_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha}{}^*)\right)^2\right. \\
&\qquad \left. + \left(\sum_{\boldsymbol{k}\alpha}\omega(c_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha} + c^\dagger_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha}{}^*)\right)^2\right]dV \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\alpha}\omega\left(c_{\boldsymbol{k}\alpha}c^\dagger_{\boldsymbol{k}\alpha} + c^\dagger_{\boldsymbol{k}\alpha}c_{\boldsymbol{k}\alpha}\right) \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}\alpha}\omega\left(c^\dagger_{\boldsymbol{k}\alpha}c_{\boldsymbol{k}\alpha} + \frac{1}{2}\right) \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

となって (3.17) と同じ結果が得られる。更に $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ の第二量子化演算子を、(3.26) を用いて

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \sum_{\boldsymbol{k}\alpha}\left(c_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha} + c^\dagger_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\alpha}}{}^*\right) \\
\boldsymbol{H} &= \sum_{\boldsymbol{k}\alpha}\left(c_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\alpha} + c^\dagger_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{\alpha}}{}^*\right) \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

と定義しておく。これは

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha}{}^*}{\partial t} = -i\omega\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha}{}^* = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha}{}^* \\
&\mathrm{rot}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha}{}^* = [(-i\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha}{}^*] = -i\omega[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha}{}^*] \\
&= [\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\alpha}{}^*] \qquad (3.34)
\end{aligned}
$$

より自然な定義である。ここから、$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{A}$ と同様 hermite であることがわかる。つまり $\boldsymbol{A}^\dagger = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}^\dagger = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}^\dagger = \boldsymbol{H}$ である。これらと (3.28) と (3.30) を用いて、第二量

子化のハミルトニアンを計算すると

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{8\pi}\int (\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^\dagger + \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^\dagger)dV = \frac{1}{8\pi}\int (\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2)dV \\
&= \frac{1}{8\pi}\int \left[\left(\sum_{\boldsymbol{k}\alpha}(c_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha} + c^\dagger \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha}{}^*)\right)^2 + \left(\sum_{\boldsymbol{k}\alpha}(c_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\alpha} + c^\dagger \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\alpha}{}^*)\right)^2\right] dV \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}\alpha}\frac{1}{2}\left(c_{\boldsymbol{k}\alpha}c^\dagger_{\boldsymbol{k}\alpha} + c^\dagger_{\boldsymbol{k}\alpha}c_{\boldsymbol{k}\alpha}\right)\frac{1}{4\pi}\int \left[(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\alpha}{}^*) + (\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\alpha}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\alpha}{}^*)\right] dV \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\alpha}\omega\left(c_{\boldsymbol{k}\alpha}c^\dagger_{\boldsymbol{k}\alpha} + c^\dagger_{\boldsymbol{k}\alpha}c_{\boldsymbol{k}\alpha}\right) \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}\alpha}\omega\left(c^\dagger_{\boldsymbol{k}\alpha}c_{\boldsymbol{k}\alpha} + \frac{1}{2}\right) \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

となって再び同じ結果が得られる。

偏極ベクトル (3.22) は、電磁波の進行方向 $\boldsymbol{n}$ へのスピン 1 のスピンベクトル $\boldsymbol{S}$ の投影値 $(\boldsymbol{n}\boldsymbol{S})$ の固有状態である。すなわち

$$(\boldsymbol{n}\boldsymbol{S})e^{(\lambda)} = \lambda e^{(\lambda)} \qquad (\lambda = \pm 1) \qquad (3.36)$$

である。この式は Dirac 粒子における spinor の固有方程式 (1.2.97) に対応する。この式を示すためには、まず直交表示のスピン 1 スピンベクトル $\boldsymbol{S}$ を定義する。(「Spin 角運動量」のところの (**??**) のところで導いた $\boldsymbol{S}$ は、状態ベクトルの表示が角運動量表示で直交表示ではない。) そのためには、直交表示の軌道角運動量演算子 $\boldsymbol{\ell} = [\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}] = (-i)[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nabla}]$ を再考する。$\boldsymbol{\ell}_z x = iy, \boldsymbol{\ell}_z y = -ix, \boldsymbol{\ell}_z = 0$ より、$(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ と書いて cyclic に $\boldsymbol{\ell}_i x_j = ie_{i,j,k}x_k$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$ が成り立つ。そこで $\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ を $\mathcal{K}$-系の単位ベクトルとして、S_i を $S_i\boldsymbol{e}_j = ie^{i,j,k}\boldsymbol{e}_k$ により定義する。$\mathcal{K}$- 系での球ベクトルを (1.1.23) で (ξ, η, ζ) を (x, y, z) に変えたものを $\boldsymbol{e}^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, 0, -1)$ で表わすと (紛らわしいが、これが本来の定義である)

$$S_z e^{(\lambda)} = \lambda e^{(\lambda)} \qquad (\lambda = \pm 1) \qquad (3.37)$$

である。$\mathcal{K}'$-系では、$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_\zeta$ で $S_\zeta = (\boldsymbol{S}\boldsymbol{e}_\zeta) = (\boldsymbol{S}\boldsymbol{n})$ であることから (3.36) が得られる。ここに $\boldsymbol{e}^{(\lambda)}$ は (3.22) である。

この結果は次の様にしても得られる。まずベクトルは、空間回転に対して座標と同じ様に変換する量であるから、オイラー角 (φ, θ, ψ) の空間回転 $\mathcal{R}(\varphi, \theta, \psi) = e^{-i\varphi J_z}e^{-i\theta J_y}e^{-i\psi J_z}$ (ここに $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$) に対して

$$\boldsymbol{S}' = \mathcal{R}(\varphi, \theta, \psi)\ \boldsymbol{S}\ \mathcal{R}(\varphi, \theta, \psi)^{-1} = M(\varphi, \theta, \psi)\ \boldsymbol{S} \qquad (3.38)$$

が成り立つ。ここで

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}S_x\\S_y\\S_z\end{pmatrix} \tag{3.39}$$

とおくと、${S_z}'=\mathcal{R}(\varphi,\theta,\psi)\ S_z\ \mathcal{R}(\varphi,\theta,\psi)^{-1}=M(\varphi,\theta,\psi)\ \boldsymbol{S}=(\boldsymbol{nS})$ が得られる。一方 (3.38) で

$$\boldsymbol{S}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_x\\\boldsymbol{e}_y\\\boldsymbol{e}_z\end{pmatrix} \tag{3.40}$$

とすると

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_x\\\boldsymbol{e}_y\\\boldsymbol{e}_z\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_\xi\\\boldsymbol{e}_\eta\\\boldsymbol{e}_\zeta\end{pmatrix} \tag{3.41}$$

より

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_\xi\\\boldsymbol{e}_\eta\\\boldsymbol{e}_\zeta\end{pmatrix}=M(\varphi,\theta,\psi)\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_x\\\boldsymbol{e}_y\\\boldsymbol{e}_z\end{pmatrix} \tag{3.42}$$

が得られる。ここで変換行列は直交行列だから、$(\boldsymbol{e}_\xi,\boldsymbol{e}_\eta,\boldsymbol{e}_\zeta)$ は $(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z)$ と同様に右手系の正規直交系である。具体的には

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_\xi &= (\cos\varphi\cos\theta\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi)\boldsymbol{e}_x+(\sin\varphi\cos\theta\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi)\boldsymbol{e}_y\\
&\quad+(-\sin\theta\cos\psi)\boldsymbol{e}_z\\
&=\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\theta\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi\\\sin\varphi\cos\theta\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi\\-\sin\theta\cos\psi\end{pmatrix}\\
\boldsymbol{e}_\eta &= (-\cos\varphi\cos\theta\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi)\boldsymbol{e}_x+(-\sin\varphi\cos\theta\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi)\boldsymbol{e}_y\\
&\quad+(\sin\theta\sin\psi)\boldsymbol{e}_z\\
&=\begin{pmatrix}-\cos\varphi\cos\theta\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi\\-\sin\varphi\cos\theta\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\\\sin\theta\sin\psi\end{pmatrix}\\
\boldsymbol{e}_\zeta &= \cos\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_x+\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_y+\cos\theta\boldsymbol{e}_z\\
&=\begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\theta\\\sin\varphi\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}=\boldsymbol{n}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

ここに ψ は新しい z-軸 (ζ-軸) 周りの回転だから、これを無視して $\psi=0$ とおくと

(3.43) は

$$\boldsymbol{e}_\xi = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_\eta = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_\zeta = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \boldsymbol{n} \tag{3.44}$$

となる。$\mathcal{K}$-系では $S_i\boldsymbol{e}_j = ie_{i,j,k}\boldsymbol{e}_k$ だから、$\mathcal{K}'$-系に移って更に (3.22) の $\boldsymbol{e}^{(\lambda)}$ の関係式に移ると (3.36) が得られる。

(3.26) の $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha}$ は波動方程式

$$\Box\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha} = 0 \tag{3.45}$$

を満たし、Schr"odinger 方程式の《波動函数》に対応する。$\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$ は (3.36) の様に進行方向 $\boldsymbol{n}$ へのスピン 1 のスピン演算子の射影 $(\boldsymbol{nS})$ の固有状態である。そこで、電磁波の量子である光子はスピン 1 をもつ粒子である。光子が質量を持たないことは、静止系が存在しないことを意味し helicity α としては $\alpha = \pm 1$ だけが許され、いわゆる縦波成分 $\alpha = 0$ が存在しない事に対応している。$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha}$ を共変的に書くために、偏極ベクトル $\boldsymbol{e}^{(\alpha)}$ を 4 元ベクトル e^μ の空間成分と考えて

$$e^{(\alpha)} = ((e^{(\alpha)})^\mu) = (0, \boldsymbol{e}^{(\alpha)}) \qquad (\alpha = \pm 1) \tag{3.46}$$

を導入する。これを使って (3.26) の $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\alpha}$ は

$$A^\mu_{k\alpha} = \sqrt{4\pi}\frac{(e^{(\alpha)})^\mu}{2\omega}e^{-ikx} \tag{3.47}$$

と書ける。ここに $k = (\omega, \boldsymbol{k})$ で $kx = \omega t - \boldsymbol{kx}$ である。あるいは、更に添え字 μ も省略して

$$A_{k\alpha} = \sqrt{4\pi}\frac{e^{(\alpha)}}{2\omega}e^{-ikx} \tag{3.48}$$

とも書ける。横波条件 $\boldsymbol{kA}_{\boldsymbol{k}\omega} = 0$ あるいは $k_\mu(e^{(\alpha)})^\mu = 0$ はローレンツ条件

$$\partial_\mu A^\mu_{k\alpha} = 0 \tag{3.49}$$

と同じとなる。またゲージ変換 $A^\mu \to A^\mu - \partial^\mu f$ (f は任意函数) は、ある特定の k, α をもった $A_{k\alpha}$ に話を限れば

$$(e^{(\alpha)})^\mu \to (e^{(\alpha)})^\mu + \chi k^\mu \tag{3.50}$$

と表わされる。ここに χ は k^μ だけに依存する任意のスカラー函数である。このゲージ変換に対する不変性は、(3.46) の横波条件が常に成り立つ様にできることを保証している。

(3.22) の偏極ベクトル $\boldsymbol{e}^{(\pm 1)}$ は座標系 $\mathcal{K}' = (\boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}_\eta, \boldsymbol{e}_\zeta)$ が右手系の正規直交系を成している事により、それぞれ右周りと左周りの完全円偏極を表わしている。同様に $\boldsymbol{e}_\xi$ と $\boldsymbol{e}_\eta$ は ($\boldsymbol{nS}$ の固有状態ではないが、それぞれ光子の進行方向 $\boldsymbol{e}_\zeta = \boldsymbol{n}$ に垂直な直交する二方向への完全直線偏極を表わす。これらに対して、偏極していない、あるいは部分的に偏極した状態もまた可能であり、これらは偏極の密度行列で表わされる。今二つの複素数 α, β に対して

$$\boldsymbol{e} = \alpha \boldsymbol{e}^{(1)} + \beta \boldsymbol{e}^{(-1)} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^{(1)} \\ \boldsymbol{e}^{(-1)} \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

として、内積 $(\boldsymbol{e}, (\boldsymbol{nS})\boldsymbol{e})$ を計算する。$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ の場合が完全偏極、$|\alpha|^2 + |\beta|^2 < 1$ の場合が部分偏極の場合である。

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{e}, (\boldsymbol{nS})\boldsymbol{e}) = {}^t\boldsymbol{e}^*(\boldsymbol{nS})\boldsymbol{e} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^{(1)} & \boldsymbol{e}^{(-1)} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^* (\boldsymbol{nS}) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^{(1)} \\ \boldsymbol{e}^{(-1)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^{(1)} & \boldsymbol{e}^{(-1)} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\boldsymbol{nS})\boldsymbol{e}^{(1)} \\ (\boldsymbol{nS})\boldsymbol{e}^{(-1)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^{(1)} & \boldsymbol{e}^{(-1)} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^{(1)} \\ -\boldsymbol{e}^{(-1)} \end{pmatrix} \\
&= (\alpha \boldsymbol{e}^{(1)} + \beta \boldsymbol{e}^{(-1)})^* (\alpha \boldsymbol{e}^{(1)} - \beta \boldsymbol{e}^{(-)}) = \alpha\alpha^* - \beta\beta^* = |\alpha|^2 - |\beta|^2
\end{aligned} \tag{3.52}$$

そこで 2×2 密度行列 (density matrix) を

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \beta\alpha^* & |\beta|^2 \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

で定義すると、$\rho^\dagger = \rho$ (hermite 行列) で

$$\begin{aligned}
Sp\rho(\boldsymbol{nS}) = \sum_{i,j=1,2} (\rho)_{i,j} (\boldsymbol{nS})_{j,i} &= |\alpha|^2 - |\beta|^2 \\
&= (\boldsymbol{e}, (\boldsymbol{nS})\boldsymbol{e})
\end{aligned} \tag{3.54}$$

が成り立つ。ここに

$$(\boldsymbol{nS}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

である。

ここで最後に、ハイゼンベルグ表示と相互作用表示についてまとめておく。今ハミルトニアン H が時間に依存しないとして、通常の Schr”odinger 方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = H\Psi(t) \tag{3.56}$$

を考える。更に時間に依存しない演算子を O^S として、その固有値を O とする。つまり

$$O^S\Psi(t) = O\Psi(t) \tag{3.57}$$

(O^S と H は必ずしも可換である必要はない。) この様に、演算子が時間に依存せず波動函数が時間に依存する表示をシュレーディンガー表示という。この時、(3.56) から

$$\Psi(t) = e^{-iHt}\Psi_0 \tag{3.58}$$

が得られる。ここに $\Psi_0 = \Psi(0)$ である。ここに e^{-iHt} は時間推進の作用素である。これを使って (3.57) を

$$e^{iHt}O^S e^{-iHt}e^{iHt}\Psi(t) = Oe^{iHt}\Psi(t) \tag{3.59}$$

として、これを

$$O^H(t)\Psi_0 = O\Psi_0 \tag{3.60}$$

と書く。ここに

$$O^H(t) = e^{iHt}O^S e^{-iHt} \tag{3.61}$$

をハイゼンベルグ表示の演算子という。これを時間で微分して、それを $\dot{O}_H(t)$ で表わすと

$$\dot{O}^H(t) = i[H, O^H(t)] \tag{3.62}$$

が得られる。これをハイゼンベルグ演算子の運動方程式という。特に、$H = H_0 + V$ と自由運動のハミルトニアン H_0 とポテンシャル項 V に分解される時、(3.61) にならって相互作用表示の演算子を

$$O^I(t) = e^{iH_0t}O^S e^{-iH_0t} \tag{3.63}$$

で定義すると

$$V^I(t) = e^{iH_0t}Ve^{-iH_0t} \tag{3.64}$$

より

$$\dot{V}^I(t) = i[H_0, V^I(t)] \tag{3.65}$$

が得られる。これを、相互作用表示の運動方程式という。更に、(3.58) に倣って相互作用表示の波動函数 $\Psi^I(t)$ を

$$\Psi(t) = e^{-iH_0t}\Psi^I(t) \quad \text{or} \quad \Psi^I(t) = e^{iH_0t}\Psi(t) \tag{3.66}$$

とすると、簡単に

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi^I(t) = e^{iH_0t}(-H_0 + H)\Psi(t) = V^I(t)\Psi^I(t) \tag{3.67}$$

が得られる。これもまた、相互作用表示の運動方程式といわれる。
(電磁波の項終わり)

4 場の量子論

4.1 Dirac 粒子の第二量子化

これまで準備が充分でなかったので Dirac 粒子の第二量子化について述べなかったが、ここで簡単にまとめておく。まず Dirac 粒子と反粒子の波動函数 $\psi_{\pm p,\pm\sigma}(x) = (1/\sqrt{2\varepsilon})u_{\pm p,\pm\sigma}e^{\mp ipx}$ を用いて場の演算子を

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}(x) &= \sum_{\boldsymbol{p}\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(c_{\boldsymbol{p}\sigma}u_{p,\sigma}e^{-ipx} + d^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}u_{-p,-\sigma}e^{ipx}) \\
\overline{\boldsymbol{\psi}}(x) &= \boldsymbol{\psi}^\dagger(x)\gamma^0 = \sum_{\boldsymbol{p}\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(c^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}\overline{u}_{p,\sigma}e^{ipx} + d_{\boldsymbol{p}\sigma}\overline{u}_{-p,-\sigma}e^{-ipx})
\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

とする。ここで、Dirac 粒子と反粒子の生成・消滅演算子 $c_{\boldsymbol{p}\sigma}, c^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}, d_{\boldsymbol{p}\sigma}, d^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}$ を反対称-type の交換関係 (反交換関係) $\{c, d\} = cd + dc$ によって定義する。すなわち

$$\{c_{\boldsymbol{p}\sigma}, c^\dagger_{\boldsymbol{p}'\sigma'}\} = \delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}\delta_{\sigma,\sigma'} \quad , \quad \{d_{\boldsymbol{p}\sigma}, d^\dagger_{\boldsymbol{p}'\sigma'}\} = \delta_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}'}\delta_{\sigma,\sigma'} \tag{4.1.2}$$

これ以外は全て反可換とする。第二量子化表示の系のハミルトニアンを得るためには、boson 系の様にエネルギー・運動量テンソルを作る必要はない。すでに H の表式が (1.2.21) で与えられているからである。そこで、(4.1.1) の第二量子化の場の演算子を古典的な公式 $E = \int \left(\phi^*(x)i\frac{\partial}{\partial t}\phi(x)\right)dV$ に代入して空間積分を行うと第二量子化したハミルトニアンが得られる。その際、次の関係式を用いる。まず normalization $\overline{u}_{\pm p,\pm\sigma}u_{\pm p,\pm\sigma} = \pm 2m$ (1.2.53) から (1.2.57) 式

$$\overline{u}_{\pm p,\pm\sigma}\gamma u_{\pm p,\pm\sigma'} = 2p\delta_{\sigma,\sigma'} \tag{4.1.3}$$

が成り立つ。更に、(1.2.66) - (1.2.67) から直接

$$\overline{u}_{\pm p,\pm\sigma}u_{\mp p,\mp\sigma'}=0 \tag{4.1.4}$$

が導かれる。これらを使って

$$\begin{aligned}
H &= \int\left(\boldsymbol{\psi}^\dagger(x)i\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\psi}(x)\right)dV \\
&= \sum_{\boldsymbol{p}\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(c^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}\overline{u}_{p,\sigma}e^{ipx}+d_{\boldsymbol{p}\sigma}\overline{u}_{-p,-\sigma}e^{-ipx})\gamma^0 \\
&\quad \sum_{\boldsymbol{p}\sigma}\varepsilon\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(c_{\boldsymbol{p}\sigma}u_{p,\sigma}e^{-ipx}-d^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}u_{-p,-\sigma}e^{ipx}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{p}\sigma}\varepsilon(c^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}c_{\boldsymbol{p}\sigma}-d_{\boldsymbol{p}\sigma}d^\dagger_{p\sigma}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{p}\sigma}\varepsilon(c^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}c_{\boldsymbol{p}\sigma}+d^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}d_{p\sigma}-1)
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

ここに、粒子と反粒子の cross term は例えば空間積分から $\sim\overline{u}_{p,\sigma}\gamma^0 u_{p',\sigma'}|_{\boldsymbol{p'}=-\boldsymbol{p}}=0$ が分かる。実際、空間積分から $\boldsymbol{p'}=-\boldsymbol{p}$ の時 $\varepsilon'=\sqrt{(\boldsymbol{p'})^2+m^2}=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}=\varepsilon$ である事により、(1.2.67) から

$$\gamma^0 u_{-p',\sigma'}|_{\boldsymbol{p'}=\boldsymbol{p}}=\begin{pmatrix}-\sqrt{\varepsilon-m}(\boldsymbol{n\sigma})(w')^{\sigma'}\\ -\sqrt{\varepsilon+m}(w')^{\sigma'}\end{pmatrix}=-u_{-p,\sigma'} \tag{4.1.6}$$

が分かるから、(4.1.4) を用いて $\sim\overline{u}_{p,\sigma}\gamma^0 u_{p',\sigma'}|_{\boldsymbol{p'}=-\boldsymbol{p}}=-\overline{u}_{p,\sigma}u_{-p,\sigma'}=0$ が分かる。同様にして、運動量に対しても

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \int\left(\boldsymbol{\psi}^\dagger(x)(-i\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\psi}(x)\right)dV \\
&= \sum_{\boldsymbol{p}\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(c^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}\overline{u}_{p,\sigma}e^{ipx}+d_{\boldsymbol{p}\sigma}\overline{u}_{-p,-\sigma}e^{-ipx})\gamma^0 \\
&\quad \times\sum_{\boldsymbol{p}\sigma}\boldsymbol{p}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(c_{\boldsymbol{p}\sigma}u_{p,\sigma}e^{-ipx}-d^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}u_{-p,-\sigma}e^{ipx}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{p}\sigma}\boldsymbol{p}(c^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}c_{\boldsymbol{p}\sigma}-d_{\boldsymbol{p}\sigma}d^\dagger_{p\sigma}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{p}\sigma}\boldsymbol{p}(c^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}c_{\boldsymbol{p}\sigma}+d^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}d_{p\sigma}-1)
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

が得られる。次に, charge $Q=\int j^0 dV$ に対しては (4.1.4) より

$$
\begin{aligned}
Q &= \int \left(\boldsymbol{\psi}^\dagger(x)\gamma^0\boldsymbol{\psi}(x)\right) dV \\
&= \sum_{\boldsymbol{p}\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(c^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}\overline{u}_{p,\sigma}e^{ipx} + d_{\boldsymbol{p}\sigma}\overline{u}_{-p,-\sigma}e^{-ipx})\gamma^0 \\
&\quad\times \sum_{\boldsymbol{p}\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(c_{\boldsymbol{p}\sigma}u_{p,\sigma}e^{-ipx} + d^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}u_{-p,-\sigma}e^{ipx}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{p}\sigma}(c^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}c_{\boldsymbol{p}\sigma} + d_{\boldsymbol{p}\sigma}d^\dagger_{p\sigma}) \\
&= \sum_{\boldsymbol{p}\sigma}(c^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}c_{\boldsymbol{p}\sigma} - d^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}d_{p\sigma} + 1)
\end{aligned}
\tag{4.1.8}
$$

粒子と反粒子の占有数を $N_{\boldsymbol{p}\sigma}, \overline{N}_{\boldsymbol{p}\sigma}$ とおくと、これらは

$$
\begin{aligned}
H &= \sum_{\boldsymbol{p}\sigma} \varepsilon \left(N_{\boldsymbol{p\sigma}} + \overline{N}_{\boldsymbol{p}\sigma} - 1\right) \\
\boldsymbol{P} &= \sum_{\boldsymbol{p}\sigma} \boldsymbol{p} \left(N_{\boldsymbol{p\sigma}} + \overline{N}_{\boldsymbol{p}\sigma} - 1\right) \\
Q &= \sum_{\boldsymbol{p}\sigma} \varepsilon \left(N_{\boldsymbol{p\sigma}} - \overline{N}_{\boldsymbol{p}\sigma} + 1\right)
\end{aligned}
\tag{4.1.9}
$$

と表わされる。

Dirac 粒子のラグランジアン formalism は

$$
\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left(\overline{\psi}\partial^\mu\gamma_\mu\psi - (\partial^\mu\overline{\psi})\gamma_\mu\psi\right) - m\overline{\psi}\psi \tag{4.1.10}
$$

で与えられる。ラグランジアンには全微分だけの任意性があるから

$$
\left(\overline{\psi}\partial^\mu\gamma_\mu\psi + (\partial^\mu\overline{\psi})\gamma_\mu\psi\right) = \partial^\mu\left(\overline{\psi}\gamma_\mu\psi\right) \tag{4.1.11}
$$

より、(4.1.10) の右辺二項は同じ寄与を与える。そこで、$\overline{\psi}$ の変分を考えると、ラグランジュ方程式により Dirac 方程式 $(\gamma p - m)\psi = 0$ が得られる。第二量子化したラグランジアン (4.1.10) はゲージ変換 $\boldsymbol{\psi}(x) \to e^{i\varphi}\boldsymbol{\psi}(x), \boldsymbol{\psi}^\dagger(x) \to e^{-i\varphi}\boldsymbol{\psi}^\dagger(x)$ に対して不変である。そこで、Noether の定理によって保存される charge Q が存在する。今の場合、それは (2.19) の様に保存する current

$$
j^\mu = i\left[\overline{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\overline{\psi})} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi\right] \tag{4.1.12}
$$

により与えられる。(4.1.10) を用いてこれを計算すると通常の定義 $j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ が得られる。

4.2 ニュートリノとカイラル対称性

これまで質量を持たない Dirac 粒子は現われなかったが、ほとんど質量を持たないニュートリノ (neutrino) はその候補である。ここでは、 $m \to 0$ の極限としてニュートリノを捉えて、その場合に重要となるカイラル対称性 (chiral symmetry) について学ぶ。Spin 1/2 を持つ粒子の満たす Dirac 方程式 $(\gamma p - m)\psi = 0$ は、$m = 0$ の場合 $(\gamma p)\psi = 0$ となる。すでに学んだ様に、標準表示の Dirac spinor (1.2.67) で 2-次元スピノール w^σ を helicity 状態 (1.2.86) を使うと

$$
\begin{aligned}
u_{p,\sigma} &= \sqrt{\varepsilon}\begin{pmatrix} w^\sigma \\ (\boldsymbol{n\sigma})w^\sigma \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{\varepsilon}\begin{pmatrix} w^\sigma \\ (2\sigma)w^\sigma \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.2.1}
$$

となる。そこで標準表示の γ^5 (1.2.25) を使うと

$$
\gamma^5 u_{p,\sigma} = -(2\sigma)u_{p,\sigma} \tag{4.2.2}
$$

が得られる。ここに、$\sigma = \pm 1/2$ である。そこで

$$
\frac{1 \pm \gamma^5}{2} u_{p,\sigma} = (\frac{1}{2} \mp \sigma)u_{p,\sigma} \tag{4.2.3}
$$

これを具体的に書くと

$$
\begin{aligned}
&\frac{1+\gamma^5}{2}u_{p,1/2} = 0 \\
&\frac{1-\gamma^5}{2}u_{p,1/2} = u_{p,1/2} \\
&\frac{1+\gamma^5}{2}u_{p,-1/2} = u_{p,-1/2} \\
&\frac{1-\gamma^5}{2}u_{p,-1/2} = 0
\end{aligned} \tag{4.2.4}
$$

となる。これを $\eta_p = u_{p,-1/2}, \eta_{-p} = u_{p,1/2}$ と書いて、それぞれ neutorino (ν), anti-neutrino ($\overline{\nu}$) という。 (1.2.97) より $(\boldsymbol{n\sigma})u_{p,\sigma} = 2\sigma u_{p,\sigma}$ だから $(\boldsymbol{n\sigma})\eta_p = -\eta_p, (\boldsymbol{n\sigma})\eta_{-p} = \eta_{-p}$ である。neutrino は進行方向へのスピン射影値 helicity=-1/2 を持っており左巻き、anti-neutrino は helicity 1/2 を持つ右巻き偏向の質量ゼロの Dirac 粒子である。(4.2.4) で $P_\pm = \frac{1\pm\gamma^5}{2}$ はカイラル対称性 (chiral symmetry) の射影演算子 (projection operator) である。実際、${\gamma^5}^2 = 1$ より $P_\pm^2 = P_\pm, P_+ + P_- = 1$

であり progection operator の満たすべき性質を持っている。$P_+\eta_p=\eta_p, P_-\eta_{-p}=\eta_{-p}$ より、neutrino と anti-neutrino はともにカイラル対称性の演算子の固有状態となっている。

$$\begin{aligned}\gamma^5\eta_p=\eta_p \quad \text{or} \quad \frac{1+\gamma^5}{2}\eta_p=\eta_p\\ \gamma^5\eta_{-p}=-\eta_{-p} \quad \text{or} \quad \frac{1-\gamma^5}{2}\eta_{-p}=\eta_{-p}\end{aligned}\tag{4.2.5}$$

である。この式は

$$\begin{aligned}\psi_\nu(x)=\psi_{p,-1/2}=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}u_{p,-1/2}e^{-ipx}=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\eta_pe^{-ipx}\\ \psi_{\overline{\nu}}(x)=\psi_{p,1/2}=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}u_{p,1/2}e^{-ipx}=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\eta_pe^{-ipx}\end{aligned}\tag{4.2.6}$$

をニュートリノと反ニュートリノの波動函数として

$$\begin{aligned}\gamma^5\psi_\nu=\psi_\nu \quad \text{or} \quad \frac{1+\gamma^5}{2}\psi_\nu=\psi_\nu\\ \gamma^5\psi_{\overline{\nu}}=-\psi_{\overline{\nu}} \quad \text{or} \quad \frac{1-\gamma^5}{2}\psi_{\overline{\nu}}=\psi_{\overline{\nu}}\end{aligned}\tag{4.2.7}$$

とも書ける。これらに対して、(1.2.15) の current $j^\mu=\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ を計算すると、$(\gamma^5)^dagger=\gamma^5,\gamma^5\gamma^\mu=-\gamma^\mu\gamma^5,(\gamma^5)^2=1$ 等を使って

$$\begin{aligned}(j^\mu)_\nu=\overline{\psi}_\nu\gamma^\mu\psi_\nu=\overline{\psi}_\nu\frac{1-\gamma^5}{2}\gamma^\mu\frac{1+\gamma^5}{2}\psi_\nu=\overline{\psi}_\nu\gamma^\mu\frac{1+\gamma^5}{2}\psi_\nu\\ (j^\mu)_{\overline{\nu}}=\overline{\psi}_{\overline{\nu}}\gamma^\mu\psi_{\overline{\nu}}=\overline{\psi}_{\overline{\nu}}\frac{1+\gamma^5}{2}\gamma^\mu\frac{1-\gamma^5}{2}\psi_{\overline{\nu}}=\overline{\psi}_{\overline{\nu}}\gamma^\mu\frac{1-\gamma^5}{2}\psi_{\overline{\nu}}\end{aligned}\tag{4.2.8}$$

が成り立つ。

最後にニュートリノ current の charge に対する第二量子化表示を求めよう。ニュートリノは $m=0$ だから $m\to-m$ によって反粒子波動函数を定義するわけにはいかない。そこで、ニュートリノの第二量子化演算子として

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}(x)=\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(c_{\boldsymbol{p}}\eta_pe^{-ipx}+d^\dagger_{\boldsymbol{p}}\eta_{-p}e^{ipx})\\ \overline{\boldsymbol{\eta}}(x)=\boldsymbol{\eta}^\dagger(x)\gamma^0=\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(c^\dagger_{\boldsymbol{p}}\overline{\eta}_pe^{ipx}+d_{\boldsymbol{p}}\overline{\eta}_{-p}e^{-ipx})\end{aligned}\tag{4.2.9}$$

と定義しよう。そうすると

$$j^\mu=\overline{\boldsymbol{\eta}}\gamma^\mu\boldsymbol{\eta}=\int\overline{\boldsymbol{\eta}}(x)\gamma^\mu\boldsymbol{\eta}(x)dV\tag{4.2.10}$$

から

$$j^0 = \sum_{\boldsymbol{p}} (c^\dagger_{\boldsymbol{p}} c_{\boldsymbol{p}} + d_{\boldsymbol{p}} d^\dagger_{\boldsymbol{p}}) = \sum_{\boldsymbol{p}} (c^\dagger_{\boldsymbol{p}} c_{\boldsymbol{p}} - d^\dagger_{\boldsymbol{p}} d_{\boldsymbol{p}} + 1)$$
$$= \sum_{\boldsymbol{p}} (N_{\boldsymbol{p}} c_{\boldsymbol{p}} - \overline{N}_{\boldsymbol{p}} + 1) \tag{4.2.11}$$

と有限 mass と同じ式が得られる。ここに cross term は、以前と同様に (**??**) - (**??**) を用いて $\sim \sum_{\boldsymbol{p}} \overline{\eta}_{-p} \gamma^0 \eta_{p'}|_{\boldsymbol{p'}=-\boldsymbol{p}} = \overline{u}_{p,1/2} \gamma^0 u_{p',-1/2}|_{\boldsymbol{p'}=-\boldsymbol{p}} = 0$ が $\sim \overline{u}_{p,\sigma} \gamma^0 u_{p',\sigma'}|_{\boldsymbol{p'}=-\boldsymbol{p}} = -\overline{u}_{p,\sigma} u_{-p,\sigma'} = 0$ の特別の場合として得られる。

4.3 CPT 変換

4.3.1 boson 系の CPT 変換

ここではまず、スピン 0 のボソン系の第二量子化演算子 (2.26)

$$\boldsymbol{\psi}(x) = \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(a_{\boldsymbol{p}} e^{-ipx} + b^\dagger_{\boldsymbol{p}} e^{ipx} \right) \tag{4.3.1}$$

に対する CPT 変換の交換を考える。

第二量子化表示では C 変換 (charge conjugation) の交換は粒子と反粒子を入れ替える操作として定義される。すなわち

$$C : a_{\boldsymbol{p}} \to b_{\boldsymbol{p}} \quad , \quad b_{\boldsymbol{p}} \to a_{\boldsymbol{p}} \tag{4.3.2}$$

そこで

$$(\boldsymbol{\psi}(x))^C = (\boldsymbol{\psi}(x))^\dagger \tag{4.3.3}$$

である。また、パリティ反転 P に対する効果は (2.27) -(2.28) より

$$P : a_{\boldsymbol{p}} \to \pm\, a_{-\boldsymbol{p}} \quad , \quad b_{\boldsymbol{p}} \to \pm\, b_{-\boldsymbol{p}} \tag{4.3.4}$$

$$(\boldsymbol{\psi}(x))^P = \pm \boldsymbol{\psi}(t, -\boldsymbol{x}) \tag{4.3.5}$$

次に、T 変換 (time reversal) に対しては演算子の順番の変更と複素共役 (c.c.) をとる操作を含まなければいけない。そこで、これを第二量子化表示で

$$T : a_{\boldsymbol{p}} \to (phase) \times \ a^\dagger_{-\boldsymbol{p}} \quad , \quad b_{\boldsymbol{p}} \to (phase) \times \ b^\dagger_{-\boldsymbol{p}} \tag{4.3.6}$$

とすると、PT および CPT の効果は

$$PT : a_{\boldsymbol{p}} \to \pm\, (phase) \times \ a^\dagger_{\boldsymbol{p}} \quad , \quad b_{\boldsymbol{p}} \to \pm\, (phase) \times \ b^\dagger_{\boldsymbol{p}} \tag{4.3.7}$$

かつ

$$CPT : a_{\boldsymbol{p}} \rightarrow \pm\,(phase) \times\ b_{\boldsymbol{p}}^{\dagger} \quad , \quad b_{\boldsymbol{p}} \rightarrow \pm\,(phase) \times\ a_{\boldsymbol{p}}^{\dagger} \tag{4.3.8}$$

そこで、これを (4.3.1) に施すと

$$(\boldsymbol{\psi}(x))^{CPT} = \sum_{\boldsymbol{p}} \pm \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left((phase) b_{\boldsymbol{p}}^{\dagger} e^{-ipx} + (phase)^{*} a_{\boldsymbol{p}} e^{ipx}\right) \tag{4.3.9}$$

となる。ここで、$(phase) = \pm 1$ と選ぶと

$$(\boldsymbol{\psi}(x))^{CPT} = \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(b_{\boldsymbol{p}}^{\dagger} e^{-ipx} + a_{\boldsymbol{p}} e^{ipx}\right) = \boldsymbol{\psi}(-x) \tag{4.3.10}$$

となる。つまり、CPT 変換は 4-反転 (x →-x) に帰着する。この時

$$T : a_{\boldsymbol{p}} \rightarrow \pm\, a_{-\boldsymbol{p}}^{\dagger} \quad , \quad b_{\boldsymbol{p}} \rightarrow \pm\, b_{-\boldsymbol{p}}^{\dagger} \tag{4.3.11}$$

で

$$(\boldsymbol{\psi}(x))^{T} = \pm \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left(a_{-\boldsymbol{p}}^{\dagger} e^{-ipx} + b_{-\boldsymbol{p}} e^{ipx}\right) = \pm \boldsymbol{\psi}(-t, \boldsymbol{x})^{\dagger} \tag{4.3.12}$$

となる。

Noether current (**??**)

$$j^{\mu}(x) = i[\boldsymbol{\psi}(x)^{\dagger}(\partial^{\mu}\boldsymbol{\psi}(x)) - (\partial^{\mu}\boldsymbol{\psi}(x)^{\dagger})\boldsymbol{\psi}(x)] \tag{4.3.13}$$

に対して CPT 変換の効果を考えると、まず C 変換に対しては (4.3.3) から $\boldsymbol{\psi}(x)$ と $\boldsymbol{\psi}(x)$ が入れ替わるが、これらの可換性から

$$C : j^{\mu}(x) \rightarrow -\, j^{\mu}(x) \tag{4.3.14}$$

この時、同じタイプの第二量子化演算子の交換関係から constant term が出るが例によってこれらは無視することとする。次に P 変換に対しては (4.3.5) から

$$P : (j^{0}(x), \boldsymbol{j}(x)) \rightarrow (j^{0}(t, -\boldsymbol{x}), -\boldsymbol{j}(t, -\boldsymbol{x})) \tag{4.3.15}$$

最後に T 変換に対しては (4.3.12) と $i^{*} = -i$ から

$$T : (j^{0}(x), \boldsymbol{j}(x)) \rightarrow (j^{0}(-t, \boldsymbol{x}), -\boldsymbol{j}(-t, \boldsymbol{x})) \tag{4.3.16}$$

そこで、これらを組み合わせると

$$PT : (j^{0}(x), \boldsymbol{j}(x)) \rightarrow (j^{0}(-t, -\boldsymbol{x}), \boldsymbol{j}(-t, -\boldsymbol{x})) \tag{4.3.17}$$

$$CPT : (j^0(x), \boldsymbol{j}(x)) \to -\,(j^0(-t, -\boldsymbol{x}), \boldsymbol{j}(-t, -\boldsymbol{x})) \tag{4.3.18}$$

が得られる。すなわち、CPT 変換の効果は 4-反転の効果 $CPT : j(x) \to -\,j(-x)$ である。

一般には C, P, T 変換の効果は演算子をまた別の演算子に変えるので、その固有状態を持たない。しかし、その様な状態が存在しない訳ではない。その例として、スピン 0 のボソン系で粒子と反粒子とからなる二粒子系を考えよう。C 変換は粒子と反粒子を入れ替えるが、その時同時に相対座標 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ の符号を変えると二粒子系は元の状態に戻る。この事は、二粒子の交換に対してボソン系の波動函数が符号を変えないことに対応している。相対運動の軌道角運動量を ℓ とすると、$C(-)^\ell = 1$ である。スピン 0 のボソンの粒子と反粒子の内部対称性は同じだから、この系のパリティは $P = (-)^\ell$ であり、従って $C = P = (-)^\ell$ である。この時、この複合粒子系はスピン ℓ の素粒子の様に振る舞う。また、Noether current の charge は $Q = 1 - 1 = 0$ である。

スピン 0 の真性中性粒子もその様な例である。この時、粒子と反粒子は同じだから C 変換を 2 回繰り返すと元へ戻る: $C^2 = 1$. そこで、$C = \pm 1$ の二通りの可能性がある。つまり

$$(\boldsymbol{\psi}(x))^C = \pm\boldsymbol{\psi}(x) \tag{4.3.19}$$

(注意) 真性中性粒子に対しては $(\boldsymbol{\psi}(x))^\dagger = \boldsymbol{\psi}(x)$ であるが、(4.3.3) から $(\boldsymbol{\psi}(x))^C = \boldsymbol{\psi}(x)^d agger = \boldsymbol{\psi}(x)$ となるのではない。(4.3.3) はあくまでも、複素スカラー場に対する関係式である。

あとで示すが (4.3.14) の関係式 $C : j^\mu(x) \to -\,j^\mu(x)$ は、実はスピン 1/2 の Dirac 粒子の vector current $j^\mu(x) = \overline{\psi(x)}\gamma^\mu\psi(x)$ に対しても成り立っている。((**??**) 参照) そこで Dirac 粒子と電磁場の相互作用 $\int j_\mu(x)A^\mu(x)d^4x$ が C 変換に対して不変になるためには $(A^\mu(x))^C = -A^\mu(x)$ でなければならない。すなわち、電磁場はスピン 1 の真性中性場であり $(A^\mu(x)^\dagger = A^\mu(x)$ であるが、C 変換に対しては符号を変える。一方、P 変換に対しては通常の真性ベクトルのごとく

$$P : (A^0(x), \boldsymbol{A}(x)) \to (A^0(t, -\boldsymbol{x}), -\boldsymbol{A}(t, -\boldsymbol{x})) \tag{4.3.20}$$

T 変換に対しては

$$T : (A^0(x), \boldsymbol{A}(x)) \to (A^0(-t, \boldsymbol{x}), -\boldsymbol{A}(-t, \boldsymbol{x})) \tag{4.3.21}$$

そこで、これらを組み合わせると

$$PT : (A^0(x), \boldsymbol{A}(x)) \to (A^0(-t, -\boldsymbol{x}), \boldsymbol{A}(-t, -\boldsymbol{x})) \tag{4.3.22}$$

$$CPT : (A^0(x), \boldsymbol{A}(x)) \to -\,(A^0(-t, -\boldsymbol{x}), \boldsymbol{A}(-t, -\boldsymbol{x})) \tag{4.3.23}$$

が得られる。すなわち、CPT 変換の効果は再び 4-反転の効果 $CPT : A(x) \to -\,A(-x)$ である。

4.3.2 Dirac 粒子の CPT 変換

[C 変換]

ここでは、有限の mass を持つ一般の Dirac 粒子の記述に戻ってまず Dirac 粒子の CPT 変換について議論する。(4.1.1) では $\overline{u}_{-p,\sigma}$ を反粒子の波動函数と呼んだが、この式は当然粒子の Dirac 方程式 $(gammap - m)u_{p,\sigma} = 0$ を満たしてはいない。しかしながら、$\overline{\psi}_{-p,-\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\overline{u}_{-p,-\sigma}e^{ipx}$ に対して unitary 変換を施すことで、これを通常の Dirac 方程式 $(\gamma p - m)\psi_{p,\sigma} = 0$ を満たす様にすることができる。例えば陽電子に対して

$$C\psi_{-p,-\sigma} = U_C{}^t\overline{\psi}_{-p,-\sigma} = \psi^{pos}_{p,\sigma} \tag{4.3.24}$$

とすると

$$(\gamma p - m)\psi^{pos}_{p,\sigma} = 0 \tag{4.3.25}$$

と出来るので、$\psi^{pos}_{p,\sigma}$ を電子の波動函数の様に正の質量 $m > 0$、運動量 $\boldsymbol{p}$、エネルギー $\varepsilon = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ 持つ粒子として扱う事が出来る。(4.3.24) では、$\overline{\psi}_{-p,-\sigma}$ が bra side のベクトルであるためその転置をとって ${}^t\overline{\psi}_{-p,-\sigma}$ としてある。この様な粒子と反粒子の変換 C を荷電共役変換 (charge conjugation) という。

(4.3.24) は平面波についてであるが、一般の場合にも

$$C\psi_{p,\sigma} = U_C{}^t\overline{\psi}_{p,\sigma} = U_C\gamma^0\psi^*_{p,\sigma} \tag{4.3.26}$$

あるいは、更に添字 (p, σ) をとって

$$C\psi = U_C{}^t\overline{\psi} = U_C\gamma^0\psi^* \tag{4.3.27}$$

により C を定義することができる。ここに $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ を使った。(4.3.27) とその adjoint の内積をとると

$$\begin{aligned}\psi^\dagger C^\dagger C\psi &= {}^t\psi\gamma^0(U_C)^\dagger U_C\gamma^0\psi^* \\ &= {}^t\psi\psi^* = \psi^\dagger\psi\end{aligned} \tag{4.3.28}$$

より、$C^\dagger C = (U_C)^\dagger U_C = 1$ である。U_C を求めるために $\overline{\psi}$ の満たすべき Dirac 方程式 $\overline{\psi}(\gamma\overleftarrow{p} + m) = 0$ ((1.2.13) 参照) の transpose をとって $({}^t\gamma p + m){}^t\overline{\psi} = 0$. これに左から U_C を掛けて、$(\gamma p - m)C\psi = 0$ と比較すると U_C が満たすべき条件として $U_C{}^t\gamma = -\gamma U_C$ が得られる。ここから、η を任意係数として $U_C = \eta\gamma^2\gamma^0$ が分かる。実際、γ^0 の時は $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \gamma^2\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^2$ で O.K. また γ^i に対しては、i の現れるのは σ_y だけだから $\boldsymbol{\gamma}^\dagger = -\boldsymbol{\gamma}, \gamma^{2^*} = -\gamma^2$ より ${}^t\gamma^{1,3} = -\gamma^{1,3}, {}^t\gamma^2 = \gamma^2$. そこで、$\gamma^2\gamma^{0t}\gamma^{1,3} = -\gamma^2\gamma^0\gamma^{1,3} = -\gamma^{1,3}\gamma^2\gamma^0$、$\gamma^2\gamma^{0t}\gamma^2 = \gamma^0 = -\gamma^2\gamma^2\gamma^0$ で O.K. またこの時、$\gamma^5 = (-i)\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ から $U_C{}^t\gamma^5 = (-i)\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 U_C = \gamma^5$ も分かる。また、η は $U_C U^\dagger{}_C = 1$、$\gamma^2\gamma^{0\dagger}\gamma^2\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^2\gamma^2\gamma^0 = 1$ から $\eta^*\eta = 1$ であることが分かる。ここでは、あとの式の必要上 $\eta = 1$ と取る事にする。そこで結局

$$U_C = \gamma^2\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^2 = -\alpha_y \tag{4.3.29}$$

で $\alpha_y = \gamma^0\gamma^2$ を使って

$$C\psi = U_C{}^t\overline{\psi} = \gamma^2\gamma^{0t}\overline{\psi} = \gamma^2\psi^* = -\alpha_y{}^t\overline{\psi} \tag{4.3.30}$$

であることが分かる。以下、スピノール表示と標準で便利な公式を挙げておく。

(スピノール表示)

スピノール表示では

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_{\dot\beta} \end{pmatrix} \tag{4.3.31}$$

また、スピノールの添字を上げ下げする変換行列 C は ((1.1.6) 参照)

$$(C_{\alpha,\beta}) = (C^{\alpha,\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2 \tag{4.3.32}$$

である。スピノール表示では

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.33}$$

であるから、$C\psi = \gamma^2\psi^*$ は

$$\begin{aligned} C\begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_{\dot\beta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\xi^\alpha)^* \\ (\eta_{\dot\beta})^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sigma_y(\eta_{\dot\beta})^* \\ \sigma_y(\xi^\alpha)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(\eta^{\dot\alpha})^* \\ i(\xi_\beta)^* \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.3.34}$$

結局

$$
\begin{aligned}
C\xi^{\alpha} &= i(\eta^{\dot\alpha})^* \\
C\eta_{\dot\beta} &= i(\xi_{\beta})^*
\end{aligned}
\tag{4.3.35}
$$

である。すなわち、スピノール表示では上下のスピノール成分を入れ替え複素共役を取る操作 (bra side と ket side の交換) が粒子・反粒子変換の効果である。

(標準表示)

$C\phi_{p,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} C u_{p,\sigma} C^{-1} C e^{-ipx}$ で $Ce^{-ipx} = e^{ipx}$、$\overline{\phi}_{p,\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \overline{u}_{p,\sigma} e^{ipx}$ に注意すると、$C\psi_{p,\sigma} = -\alpha_y {}^t\overline{\psi}_{p,\sigma}$ は u については

$$
Cu_{p,\sigma}C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix} {}^t\overline{u}_{p,\sigma}
\tag{4.3.36}
$$

である。ここに (1.2.68) を使うと

$$
\begin{aligned}
Cu_{p,\sigma}C^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon+m}\, w^{\sigma *} \\ -\sqrt{\varepsilon-m}(\boldsymbol{n}^t\boldsymbol{\sigma}) w^{\sigma *} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon-m}\,\sigma_y(\boldsymbol{n}^t\boldsymbol{\sigma}) w^{\sigma *} \\ -\sigma_y\sqrt{\varepsilon+m}\, w^{\sigma *} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{\varepsilon-m}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\sigma_y w^{\sigma *} \\ -\sqrt{\varepsilon+m}\,\sigma_y w^{\sigma *} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.3.37}
$$

最後の式では、${}^t\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^*$, $\sigma_y\boldsymbol{\sigma}^* = -\boldsymbol{\sigma}\sigma_y$ を使った。一方、$u_{-p,-\sigma}$ に対する (1.2.67) の式で

$$
(w')^{\sigma} = -\sigma_y (w^{-\sigma})^*
\tag{4.3.38}
$$

とおくと $(w')^{-\sigma} = -\sigma_y w^{\sigma *}$ より

$$
\begin{aligned}
u_{-p,-\sigma} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon-m}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})(w')^{-\sigma} \\ \sqrt{\varepsilon+m}\,(w')^{-\sigma} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{\varepsilon-m}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\sigma_y w^{\sigma *} \\ -\sqrt{\varepsilon+m}\,\sigma_y w^{\sigma *} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.3.39}
$$

となって (4.3.37) と同じになる。結局

$$
Cu_{p,\sigma}C^{-1} = u_{-p,-\sigma}
\tag{4.3.40}
$$

という結果が得られる。(4.3.38) の $(w')^{\sigma}$ の選択は、以前の $\eta = 1$ という phase の選択に関係している。同様にして

$$
Cu_{-p,-\sigma}C^{-1} = u_{p,\sigma}
\tag{4.3.41}
$$

が得られる。実際、(4.3.39) の複素共役をとって下の成分に負符号をつけ $-\alpha_y$ を掛けると簡単に示すことができる。そこで

$$\psi^{pos}_{p,\sigma} = C\phi_{-p,-\sigma} = C\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}u_{-p,-\sigma}C^{-1}Ce^{ipx}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}u_{p,\sigma}e^{-ipx} = \psi_{p,\sigma} \tag{4.3.42}$$

となって、$(\gamma p - m)\psi^{pos}_{p,\sigma} = 0$ を満たす。標準表示での粒子・反粒子効果は結局 $\psi_{p,\sigma} \leftrightarrow \psi_{-p,-\sigma}$ の交換である。bra side と ket side の交換は、(4.3.38) で償われている。

[P 変換]

Dirac 粒子のパリティ変換については、既に (1.1.65) で学んだ。すなわち $P^2 = -1$ として、スピノール表示では

$$P : \xi^\alpha \rightarrow i\eta_{\dot\alpha} \quad , \quad P : \eta_{\dot\beta} \rightarrow i\xi^\beta \tag{4.3.43}$$

つまり

$$P\psi = P\begin{pmatrix}\xi^\alpha \\ \eta_{\dot\beta}\end{pmatrix} = i\begin{pmatrix}\eta_{\dot\alpha} \\ \xi^\beta\end{pmatrix} \tag{4.3.44}$$

空間座標に対しては、もちろん $P\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$ である。標準表示ではスピノール表示での γ^0 を使うと、$P\psi(\boldsymbol{x}) = i\gamma^0\psi(-\boldsymbol{x})$ である。標準表示でも同じ式が成り立つ。また

$$P\overline{\psi(\boldsymbol{x})} = P\psi(\boldsymbol{x})^d agger\gamma^0 = -i\psi(-\boldsymbol{x})^\dagger \tag{4.3.45}$$

である。

[T 変換]

時間反転変換 (time reversal transformation) T は

$$T\psi_{p,\sigma}(t,\boldsymbol{x}) = U_T{}^t\overline{\psi}_{p,\sigma}(-t, bx) \tag{4.3.46}$$

で定義される。ここに、C の時と同様に U_T は unitary matrix で $T^\dagger T = 1 and U_T^\dagger U_T = 1$ を満たす。以下、共通の添え字 (p,σ) は省略する。通常の Dirac 方程式 $(\gamma p - m)\psi = 0$ は、$p^m u = i\partial^\mu$ より

$$(\gamma^0 i\frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma\nabla} - m)\psi(t,\boldsymbol{x}) = 0 \tag{4.3.47}$$

である。一方、$\overline{\psi}(\gamma\overleftarrow{p} + m) = 0$ の transpose をとって $t \rightarrow -t$ と変えて更に左から U_T を掛けると

$$(-iU_T{}^t\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + iU_T{}^t\boldsymbol{\gamma\nabla} + mU_T)^t\overline{\psi}(-t,\boldsymbol{x}) = 0 \tag{4.3.48}$$

となる。そこで

$$
\begin{aligned}
{U_T}^t\gamma^0 &= \gamma^0 U_T \\
{U_T}^t\boldsymbol{\gamma} &= -\boldsymbol{\gamma} U_T
\end{aligned}
\tag{4.3.49}
$$

として、全体の符号を変えると (4.3.46) が (4.3.47) と同じ方程式を満たすことが分かる。(4.3.49) を使うと $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ より

$$
{U_T}^t\gamma^5 = -\gamma^5 U_T \tag{4.3.50}
$$

であることも分かる。(4.3.49) の解は、η を任意係数として $U_T = \eta\gamma^3\gamma^1\gamma^0$ である。更に、$\gamma^3\gamma^1\gamma^0 = unitary$ であるから $U_T{U_T}^\dagger = \eta\eta^* = 1$. η には phase $e^{i\alpha}$ だけの不定性が残るが、ここでは $\eta = i$ と取る。そこで、(4.3.46) は結局

$$
\begin{aligned}
T\psi(t,\boldsymbol{x}) = {U_T}^t\overline{\psi}(-t,bx) &= i\gamma^3\gamma^1\gamma^{0t}\overline{\psi}(-t,bx) \\
&= i\gamma^3\gamma^1\psi(-t,\boldsymbol{x})^*
\end{aligned}
\tag{4.3.51}
$$

となる。

(スピノール表示)

spinor 表示では

$$
\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.52}
$$

より

$$
\gamma^3\gamma^1 = \begin{pmatrix} -\sigma_3\sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_3\sigma_1 \end{pmatrix} = -\sigma_3\sigma_1 = -i\sigma_2 \tag{4.3.53}
$$

だから $i\gamma^3\gamma^1 = \sigma_2 = \sigma_y$. そこで (4.3.51) より

$$
T\psi(t,\boldsymbol{x}) = \sigma_y\psi(-t,\boldsymbol{x})^* \tag{4.3.54}
$$

更に、添え字の上げ下げの公式

$$
\begin{aligned}
i\sigma_y\xi^\alpha &= \eta_{\dot\beta} \\
-i\sigma\eta_{\dot\beta} &= \xi^\alpha
\end{aligned}
\tag{4.3.55}
$$

を使うと ($\boldsymbol{x}$ を省略して)

$$
\begin{aligned}
T\begin{pmatrix} \xi^\alpha(t) \\ \eta_{\dot\beta}(t) \end{pmatrix} &= \sigma_y\begin{pmatrix} \xi^\alpha(-t)^* \\ \eta_{\dot\beta}(-t)^* \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i\eta\dot\beta(-t)^* \\ -i\xi^\alpha(-t)^* \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.3.56}
$$

そこで、結局

$$
\begin{aligned}
T\xi^\alpha(t,\boldsymbol{x}) &= i\eta^{\dot{\beta}}(-t,\boldsymbol{x})^* \\
T\eta_{\dot{\beta}}(t,\boldsymbol{x}) &= -i\xi^\alpha(-t,\boldsymbol{x})^*
\end{aligned}
\tag{4.3.57}
$$

が得られる。

(標準表示)

標準表示では、(4.3.51) の γ^i は全体として符号が変わるだけだから $i\gamma^3\gamma^1 = \sigma_y$ はそのまま成り立つ。そこで標準表示の γ^0 を使って

$$
U_T = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & -\sigma_y \end{pmatrix} \tag{4.3.58}
$$

である。

[CPT 変換]

スピノール表示であるか標準表示であるかに関わらず

$$
\begin{aligned}
&T\psi(t,\boldsymbol{x}) = U_T(\overline{\psi(-t)})^t = i\gamma^3\gamma^1\gamma^0(\overline{\psi(-t,\boldsymbol{x})})^t = -i\gamma^1\gamma^3\psi(-t,\boldsymbol{x})^* \\
&P\psi(t,\boldsymbol{x}) = i\gamma^0\psi(t,-\boldsymbol{x}) \\
&C\psi(t,\boldsymbol{x}) = \gamma^2\psi(t,\boldsymbol{x})^*
\end{aligned}
\tag{4.3.59}
$$

であるので

$$
\begin{aligned}
T\psi(t,\boldsymbol{x}) &= -i\gamma^1\gamma^3\psi(-t,\boldsymbol{x})^* \\
PT\psi(t,\boldsymbol{x}) &= \gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi(-t,-\boldsymbol{x})^* \\
CPT\psi(t,\boldsymbol{x}) &= \gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^3\psi(-t,-\boldsymbol{x}) = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\psi(-t,-\boldsymbol{x}) \\
&= i\gamma^5\psi(t,-\boldsymbol{x})
\end{aligned}
\tag{4.3.60}
$$

が成り立つ。

[第二量子化表示の CPT 変換]

以上の議論を踏まえて、(4.1.1) で定義された第二量子化表示の場の演算子に対する CPT 変換 の効果を求めることができる。まず、Dirac 粒子と反粒子の波動函数 $\psi(x)_{\pm p,\pm\sigma} = (1/\sqrt{2\varepsilon})u_{\pm p,\pm\sigma}e^{\mp ipx}$ を用いて場の演算子 (4.1.1) を

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}(x) &= \sum_{\boldsymbol{p}\sigma}(c_{\boldsymbol{p}\sigma}\psi_{p,\sigma} + d^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}\psi_{-p,-\sigma}) \\
\overline{\boldsymbol{\psi}(x)} &= \boldsymbol{\psi}^\dagger(x)\gamma^0 = \sum_{\boldsymbol{p}\sigma}(c^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}\overline{\psi}_{p,\sigma} + d_{\boldsymbol{p}\sigma}\overline{\psi}_{-p,-\sigma})
\end{aligned}
\tag{4.3.61}
$$

と表わしておくと便利である。以下、スピノールはすべて標準表示で考える。
まず、C 変換に対しては

$$C : c_{\boldsymbol{p},\sigma} \to d_{\boldsymbol{p},\sigma} \quad , \quad d_{\boldsymbol{p},\sigma} \to c_{\boldsymbol{p},\sigma} \tag{4.3.62}$$

とすると、(**??**) - (**??**) が

$$\begin{aligned} C\psi_{p,\sigma} &= U_C{}^t\overline{\psi_{p,\sigma}} = \psi_{-p,-\sigma} \\ C\psi_{-p,-\sigma} &= U_C{}^t\overline{\psi_{-p,-\sigma}} = \psi_{p,\sigma} \end{aligned} \tag{4.3.63}$$

であることから、(4.1.1) は

$$\begin{aligned} C\boldsymbol{\psi}(x) &= \sum_{\boldsymbol{p}\sigma}(d_{\boldsymbol{p}\sigma}\psi_{p,\sigma} + c^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}\psi_{-p,-\sigma}) = \sum_{\boldsymbol{p},\sigma}(c^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}U_C{}^t\overline{\psi_{p,\sigma}} + d_{\boldsymbol{p}\sigma}{}^t\overline{\psi_{-p,-\sigma}}) \\ &= U_C{}^t(\sum_{\boldsymbol{p},\sigma}(c^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}\overline{\psi_{p,\sigma}} + d_{\boldsymbol{p}\sigma}\overline{\psi_{-p,-\sigma}})) = U_C{}^t\overline{\boldsymbol{\psi}(x)} \end{aligned} \tag{4.3.64}$$

となる。ここに、第二量子化表示では C, P, T は第二量子化演算子だけに作用する事は注意を要する。次に、P 変換に対しては

$$P : c_{-\boldsymbol{p},\sigma} \to ic_{\boldsymbol{p},\sigma} \quad , \quad d_{-\boldsymbol{p},\sigma} \to id_{\boldsymbol{p},\sigma} \tag{4.3.65}$$

とすると、まず $\boldsymbol{p}$ sum の符号を変えておいて

$$P\boldsymbol{\psi}(x) = i\sum_{\boldsymbol{p}\sigma}(c_{\boldsymbol{p}\sigma}\psi_{p^0,-\boldsymbol{p},\sigma} + d^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}\psi_{-p,\boldsymbol{p},-\sigma}) \tag{4.3.66}$$

であるが、標準表示では $u_{p^0,-\boldsymbol{p},\sigma} = \gamma^0 u_{p,\sigma}$ より $\psi_{p^0,-\boldsymbol{p},\sigma} = (1/\sqrt{2\varepsilon})\gamma^0 u_{p,\sigma}e^{-i(\varepsilon t+\boldsymbol{px})}$ であるから

$$\begin{aligned} P\boldsymbol{\psi}(x) &= i\gamma^0\sum_{\boldsymbol{p}\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(c_{\boldsymbol{p}\sigma}u_{p,\sigma}e^{-i(\varepsilon+\boldsymbol{px})} + d^\dagger_{\boldsymbol{p}\sigma}u_{-p,-\sigma}e^{i(\varepsilon+\boldsymbol{px})}) \\ &= i\gamma^0\boldsymbol{\psi}(t,-bx) \end{aligned} \tag{4.3.67}$$

となる。
最後に、T 変換に対しては

$$T : c_{-\boldsymbol{p},-\sigma} \to 2i\sigma c^\dagger_{\boldsymbol{p},\sigma} \quad , \quad d_{-\boldsymbol{p},-\sigma} \to 2i\sigma d^\dagger_{\boldsymbol{p},\sigma} \tag{4.3.68}$$

とすると、再びまず $\boldsymbol{p},\sigma$ sum の符号を変えておいて u の表示に戻ると

$$T\boldsymbol{\psi}(x) = \sum_{\boldsymbol{p},\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(c^\dagger_{\boldsymbol{p},\sigma}2i\sigma\gamma^0 u_{p,-\sigma}e^{-i(\varepsilon t+\boldsymbol{px})} + d_{\boldsymbol{p},\sigma}2i\sigma\gamma^0 u_{-p,-\sigma}e^{i(\varepsilon t+\boldsymbol{px})}) \tag{4.3.69}$$

である。

一方、標準表示の (4.3.58) から

$$
\begin{aligned}
U_T{}^t\overline{u}_{p,\sigma} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon+m}\sigma_y w^{\sigma *} \\ -\sqrt{\varepsilon-m}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\sigma_y w^{\sigma *} \end{pmatrix} \\
&= 2i\sigma \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon+m}w^{-\sigma *} \\ -\sqrt{\varepsilon-m}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})w^{-\sigma *} \end{pmatrix} = 2i\sigma\gamma^0 u_{p,-\sigma} \qquad (4.3.70)
\end{aligned}
$$

であることが分かる。ここに、$\sigma_y{}^t\boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{\sigma}\sigma_y$, w^σ が real であることと $\sigma_y w^\sigma = 2i\sigma w^{-\sigma}$ を使った。

同様に

$$
\begin{aligned}
U_T{}^t\overline{u}_{-p,-\sigma} &= \sigma_y \begin{pmatrix} (\boldsymbol{n}^t\boldsymbol{\sigma})\sqrt{\varepsilon-m}(w')^{-\sigma *} \\ \sqrt{\varepsilon+m}(w')^{-\sigma *} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\sqrt{\varepsilon-m}\sigma_y(w')^{-\sigma *} \\ \sqrt{\varepsilon+m}\sigma_y(w')^{-\sigma *} \end{pmatrix} \\
&= 2i\sigma \begin{pmatrix} -(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\sqrt{\varepsilon-m}(w')^{\sigma *} \\ \sqrt{\varepsilon+m}(w')^{\sigma *} \end{pmatrix} \\
&= 2i\sigma\gamma^0 u_{-p,-\sigma} \qquad (4.3.71)
\end{aligned}
$$

となる。

ここに、(4.3.38)

$$
(w')^\sigma = -\sigma_y(w^{-\sigma})^* = 2i\sigma w^{\sigma *} \qquad (4.3.72)
$$

と $\sigma_y w^\sigma = 2i\sigma w^{-\sigma}$ から得られる $\sigma_y(w')^sigma = -w^{-\sigma *} = -2i\sigma(w')^{-\sigma}$ を使った。

結局、(4.3.69) は

$$
\begin{aligned}
T\boldsymbol{\psi}(x) &= \sum_{\boldsymbol{p},\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(c^\dagger_{\boldsymbol{p},\sigma} U_T{}^t\overline{u}_{p,\sigma} e^{-i(\varepsilon t+\boldsymbol{p}\boldsymbol{x})} + d_{\boldsymbol{p},\sigma} U_T{}^t\overline{u}_{-p,-\sigma} e^{i(\varepsilon t+\boldsymbol{p}\boldsymbol{x})}) \\
&= U_T{}^t \sum_{\boldsymbol{p},\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}(c^\dagger_{\boldsymbol{p},\sigma} \overline{u}_{p,\sigma} e^{-i(\varepsilon t+\boldsymbol{p}\boldsymbol{x})} + d_{\boldsymbol{p},\sigma} \overline{u}_{-p,-\sigma} e^{i(\varepsilon t+\boldsymbol{p}\boldsymbol{x})}) \\
&= U_T{}^t \sum_{\boldsymbol{p},\sigma}(c^\dagger_{\boldsymbol{p},\sigma}\overline{\psi(-t,\boldsymbol{x})_{p,\sigma}} + d_{\boldsymbol{p},\sigma}\overline{\psi(-t,\boldsymbol{p})_{-p,-\sigma}}) \\
&= U_T{}^t\overline{\boldsymbol{\psi}(-t,\boldsymbol{x})} \qquad (4.3.73)
\end{aligned}
$$

ここに、(4.3.61) を使った。(4.3.64), (4.3.67), (4.3.73) は、classical field $\psi(x)$ と全く同じ変換則である。

(注意) (1.2.64) -(1.2.87) の最も簡単な場合の 2-次元スピノール w^σ においては、$\sigma_y w^\sigma = 2i\sigma w^{-\sigma}$ は trivial であるが (4.3.72) によると $(w')^\sigma$ は purely imaginary

であり $\sigma_y(w')^sigma = -2i\sigma(w')^{-\sigma}$ と負の符号のついた式が trivial に成り立つ。実際、この場合

$$(w')^{\frac{1}{2}} = \big(i//0\big) \quad , \quad (w')^{-\frac{1}{2}} = \big(0//-i\big) \tag{4.3.74}$$

である。

[Dirac 粒子の内部対称性]

以前、スピン 0 の boson に対しては粒子と反粒子の内部偶奇性は同じであるとしたが、スピン 1/2 の Dirac 粒子に対しては粒子と反粒子の内部偶奇性は互いに逆である事を示すことができる。それを示す為には、まず二種類の Dirac スピノール を静止系で考えてそれぞれの 2-次元スピノールを $w^{(1)^\sigma}$, $w^{(2)^\sigma}$ とする。相対 S-波で結合した 2 粒子系を重心系で考えて、それらから作られるスカラー量 $w^{(1)^\sigma}w^{(2)}{}_\sigma$ を考えるとこれはスピン $S=0$ の反対称波動函数である。相対論的枠組みの中では複合粒子系も単体系も区別がないから、この系はスピン 0 のボソン系でありそれは P 変換に対してスカラーか擬スカラーかのどちらかである。それぞれ、固有値は 1 か -1 である。粒子と反粒子の系についてこれを考えると、-1 の時粒子と反粒子の内部偶奇性は互いに逆である事が分かる。

まず、準備として Dirac スピノール ψ とその荷電共役 ψ^C は P 変換に対しては同様に振る舞うことを示す。スピノール表示の C 変換の公式 (4.3.35)

$$\psi^C = \begin{pmatrix} (\xi^C)^\alpha \\ (\eta^C)_{\dot\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(\eta^{\dot\alpha})^* \\ i(\xi_\beta)^* \end{pmatrix} \tag{4.3.75}$$

に P 変換

$$P: \xi^\alpha \!\rightarrow i\eta_{\dot\alpha} \quad , \quad P: \eta_{\dot\beta} \!\rightarrow i\xi^\beta \tag{4.3.76}$$

を施して

$$\begin{aligned} P: (\xi^C)^\alpha &= i(\eta^{\dot\alpha})^* = (C^{\alpha,\beta})^* i(\eta_{\dot\beta})^* \!\rightarrow (-C_{\beta,\alpha})^* i(i\xi^\beta)^* = -(\xi_\alpha)^* = i(\eta^C)_{\dot\alpha} \\ P: (\eta^C)_{\dot\beta} &= i(\xi_\beta)^* = (C_{\beta,\alpha})^* i(\xi^\alpha)^* \!\rightarrow (-C^{\alpha,\beta})^* i(i\eta_{\dot\alpha})^* = -(\eta^{\dot\beta})^* = i(\xi^C)^\beta \end{aligned} \tag{4.3.77}$$

が得られる。(添字の上、下の変換については (1.1.7) に注意！) そこで、ψ^C は P 変換のもとで ψ 自身の様に振る舞う。この事は、標準表示でも (4.3.64), (4.3.67) を使って示すことが出来る。実際、$\psi^C = U_C{}^t\overline{\psi} = \gamma^2\psi^*$ から $P: \psi \!\rightarrow i\gamma^0\psi$ より $P: \psi^C \!\rightarrow \gamma^2(-i)\gamma^0\psi^* = i\gamma^0\psi^C$ である。

Dirac 粒子の粒子と反粒子の内部偶奇性が逆である事を示す為に、具体的に電子と陽電子の場合について考える。粒子の静止系では、双スピノールは標準表示では

$$\psi_{0,\sigma} = \big(w^\sigma//0\big) \tag{4.3.78}$$

に帰着する。そこで、$P : \psi\!\to i\gamma^0\psi$ は 2-次元スピノールの関係式 $P : w^\sigma\!\to iw^\sigma$ となる。スピノール表示では $\xi^\sigma = \eta_{\dot\sigma} = (1/\sqrt{2})w^\sigma$ であり (normalization: 粒子に対しては $\psi^*\psi = 1$ である)、これらに対しても $P\xi^\sigma = i\xi^\sigma, P\eta^\sigma = i\eta^\sigma$ が成り立つ。一方、(4.3.42) から陽電子 (positron) の双スピノールは $\psi^{pos}_{p,\sigma} = \psi_{p,\sigma}$ と書けるから、この場合も $P\xi^{pos\sigma} = i\xi^{pos\sigma}, P\eta^{pos\sigma} = i\eta^{pos\sigma}, Pw^{pos\sigma} = iw^{pos\sigma}$ が成り立つ。そこで、$w^\sigma w^{pos}_\sigma$ は P 変換に対して符号を変える。ここから、電子と陽電子は互いに逆の内部偶奇性を持つことが分かる。

真性中性の Dirac 粒子は今のところ自然界には見つかっていないが、もしそうした粒子が存在すると粒子は自分自身が反粒子であり (4.3.62) から

$$\boldsymbol{\psi}^C(x) = \boldsymbol{\psi}(x) \tag{4.3.79}$$

が成り立つ。この時、$\psi^C = \psi$ から

$$\xi^\alpha = i(\eta^{\dot\alpha})^* \tag{4.3.80}$$
$$\eta_{\dot\beta} = i(\xi_\beta)^* \tag{4.3.81}$$

となる。

ここでは、Dirac スピノールに対して $P^2 = -1$ を仮定したが、理論的には $P^2 = 1$ と仮定することも出来る。この場合 P 変換 (4.3.76) は

$$P : \xi^\alpha\!\to\eta_{\dot\alpha} \quad , \quad P : \eta_{\dot\beta}\!\to\xi^\beta \tag{4.3.82}$$

となる。今これを仮定して (4.3.75) - (4.3.77) の計算を繰り返すと、今度は $Pw^\sigma = w^\sigma$, $Pw^{pos\sigma} = -w^{pos\sigma}$ という結果が得られる。この場合にも $w^\sigma w^{pos}_\sigma$ は P 変換に対して符号を変えるので、電子と陽電子は互いに逆の内部偶奇性を持つことが分かる。しかし、この場合は (4.3.81) に (4.3.82) の P 変換を施すと

$$P : \xi_\beta = C_{\beta,\alpha}xi^\alpha\!\to -\eta^{\dot\beta} \quad , \quad P : \eta^{\dot\alpha} = C^{\beta,\alpha}\eta_{\dot\beta}\!\to -\xi_\alpha \tag{4.3.83}$$

を使って

$$\eta_{\dot\alpha} = -i(\xi_\alpha)^* \tag{4.3.84}$$
$$\xi^\beta = -i(\eta^{\dot\beta})^* \tag{4.3.85}$$
$$\tag{4.3.86}$$

となるが、これは (4.3.81) と inconsistent (符号が逆) である。

(練習問題) 水素原子と類似な、電子と陽電子とからなる束縛状態の荷電固有値を求めよ。この様な系をポジトロニウム (positronium) という。

電子と陽電子の交換は、相対運動のベクトルの変換 $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$, スピン波動函数の座標の交換, および粒子-反粒子交換からなる。それぞれの固有値、$(-)^\ell$ (ℓ は相対の角運動量), $(-)^{S+1}$ (S は全系のスピン), C を掛けてこれが Pauli 原理の要請より -1 に等しいことを使うと

$$(-)^\ell(-)^{S+1}C = -1 \tag{4.3.87}$$

となる。そこで、$C = (-)^{\ell+S}$ である。一方、粒子と反粒子の内部偶奇性は互いに逆だから $P = (-)^{\ell+1}$ である。そこで、$CP = (-)^{S+1}$ である事が分かる。

この練習問題の応用として、後出のクォークと反クォークからなるパイ中間子の荷電対称性を決定する事ができる。パイ中間子はスピン 0 の擬スカラー粒子であるから、$\ell = 0, S = 0, P = -1$ である。そこで、$C = +1, CP = -1$ であることが分かる。これは、より正確には真性中性の π^0 中間子の場合である。光子の G-parity は $G = -1$ だから、π^0 は非常に高い確率で 2γ に崩壊する。一方、電荷を帯びた荷電中間子 $\pi^\pm$ は互いに粒子・反粒子の関係にあり荷電交換性の固有状態ではないから 2γ に崩壊する事はないこれらの粒子のおもな崩壊先は $\pi^+ \to \mu^+ + \overline{\nu}_\mu$, $\pi^- \to \mu^- + \nu_\mu$ である。あとで学ぶクォーク模型によれば、u と d をそれぞれ up, down クォークとして $\pi^+ = u\overline{d}, \pi^- = d\overline{u}, \pi^0 = (u\overline{u} + d\overline{d})/\sqrt{2}$ と表わされる。

4.4 Dirac 場の 2 次形式

4.4.1 Dirac current の分類

以下、すべて $\psi = \psi(x)$ は Dirac 方程式を満たす双スピノールとしよう。Dirac current の場の 2 次形式として可能なものは

$$\begin{aligned} S &= \overline{\psi}\psi \\ A &= \overline{\psi}i\gamma^5\psi \\ V &= \overline{\psi}\gamma\psi \\ AV &= \overline{\psi}\gamma\gamma^5\psi \\ T &= \overline{\psi}i\sigma^{\mu\nu}\psi \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

の都合 16 個である。(1+1+4+4+6=16) ここに、$\sigma^{\mu\nu} = (\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)/2 = (\boldsymbol{\alpha}, -i\boldsymbol{\Sigma})$ は反対称テンソルである。((1.2.29) の前参照) (4.4.1) は 4-次元ベクトル空間のスカラーだから、$\dagger$ を取る操作と複素共役を取る操作とは同等である。そこで、これらは全て実

数になる様 i を補ってある。実際、tensor type に対しても $(\sigma^{\mu\nu})^\dagger = pase\sigma^{\mu\nu}$ として $phase = 1$ for $(\mu\nu) = (0,i),(i,0)$ また $phase = -1$ for $(\mu\nu) = (i,j),(j,i)$. ここから、$\gamma^0 i\sigma^{\mu\nu\dagger} = \gamma^0 i\sigma^{\mu\nu}$ が分かる。(4.4.1) の $\overline{\psi}$ と ψ で挟まれた 16 個の 4 × 4 行列は 16 個の行列要素に対応している。従って、任意の 4 × 4 行列は (複素係数の範囲内で) 常にこれらの行列で展開できる。

次に、これらの current のパリティ変換に対する変換性を調べよう。まず、 S と A はスピノール表示で

$$S = \overline{\psi}\psi = \xi^*\eta + \eta^*\xi$$
$$A = \overline{\psi}i\gamma^5\psi = i(\xi^*\eta - \eta^*\xi) \tag{4.4.2}$$

より、(4.3.45) から $P\xi = i\eta, P\eta = i\xi$ なので実数性 $S^* = S, A^* = A$ と parity 変換の効果 $PS = S, PA = -A$ がすぐ分かる。また、標準表示でも $P\psi(\boldsymbol{x}) = i\gamma^0\psi(-\boldsymbol{x})$, $P\overline{\psi(\boldsymbol{x})} = P\psi(\boldsymbol{r})^d agger\gamma^0 = -i\psi(-\boldsymbol{r})^\dagger$ から $P\overline{\psi(\boldsymbol{x})}\psi(\boldsymbol{x}) = \overline{\psi(-\boldsymbol{x})}\psi(-\boldsymbol{x})$ より空間部分はキャンセルして $PS = S$ は明らかである。$PA = -A$ は γ^5 が擬スカラーであることから従う。そこで、S, A をそれぞれスカラー current、擬スカラー current という。次に V は $\overline{\psi}_{p,\sigma}\gamma\psi_{p,\sigma} = 2p$ から vector であり、AV は γ^5 の存在により擬ベクトルの変換性を持つことは明らかである。これらを、それぞれ vector current および axial-vector current と呼ぶ。すでに出てきた様に T は tensor current である。

4.4.2 Dirac current の CPT 変換

次に、x の関数としての前節のすべての Dirac current についてその CPT 変換に対する効果を議論する。ここでは、$\psi = \psi(x)$ の空間部分の x 依存性は普通省略するが、$P: \boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}, T: t \to -t$ なのでこの場合だけ明記する。また、$\overline{\psi}$ と ψ は一般には違う粒子の双スピノールの場合もあるのでこれを $\overline{\psi_a}, \psi_b$ として区別する。まず、C 変換の効果を議論する。

[C 変換]

$U_C = \gamma^2\gamma^0 = (U_C)^\dagger, (U_C)^t = -U_C, (U_C)^\dagger U_C = U_C(U_C)^\dagger = (U_C)^2 = 1$ 等を用いて

$$\psi^C = U_C{}^t\overline{\psi} = \gamma^2\gamma^0\gamma^0\psi^* = \gamma^2\psi^*$$
$$\overline{\psi^C} = (\psi^C)^\dagger\gamma^0 = \overline{\psi}^*(U_C)^\dagger\gamma^0 = {}^t\psi\gamma^0(U_C)^\dagger\gamma^0 = -{}^t\psi(U_C)^\dagger \tag{4.4.3}$$

より

$$\overline{\psi_a^C}\psi_b^C = -{}^t\psi_a{}^t\overline{\psi_b} = -\overline{\psi_b}\psi_a \tag{4.4.4}$$

ここに最後の式では、これが 4-次元スカラー量であることから transpose をとってもよいという事を使った。ここで、classical field ψ から第二量子化演算子 $\boldsymbol{\psi}$ へ移ると最後の変換で第二量子化演算子の順番が変わるから余分に $-$ 符号がつく。この際、同種粒子の交換関係 $\{c, c^\dagger\} = 1$ 等から出る constant term は無視する。そこで、(4.4.6) から $\overline{\boldsymbol{\psi}_a^C}\boldsymbol{\psi}_b^C = \overline{\boldsymbol{\psi}_b}\boldsymbol{\psi}_a$ が得られる。これを $S_{a,b}^C = S_{b,a}$ と書く。以下、S, A, V, AV, T はすべてこの様な第二量子化演算子から作られた current とする。

一般の場合 $\mathcal{O} = \gamma^5, \gamma^\mu, \cdots$ に対して

$$\mathcal{O}U_C = (phase)U_C\mathcal{O} \tag{4.4.5}$$

$(U_C = \gamma^2\gamma^0)$ の phase を求めておけば、これと ${}^t\mathcal{O}$ を用いて

$$\begin{aligned}\overline{\psi_a^C}\mathcal{O}\psi_b^C &= -{}^t\psi_a U_C \mathcal{O} U_C {}^t\overline{\psi_b} = -(phase){}^t\psi_a \mathcal{O}^t\overline{\psi_b} \\ &= -(phase)\overline{\psi_b}{}^t\mathcal{O}\psi_a\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

が求まる。例えば、$\mathcal{O} = \gamma^5$ の場合は $(phase) = 1, \gamma^5 = (\gamma^5)^\dagger = {}^t\gamma^5$ (note $\gamma^5 = real$!) だから

$$\overline{\psi_a^C}\gamma^5\psi_b^C = -\overline{\psi_b}\gamma^5\psi_a \tag{4.4.7}$$

そこで再び $\psi \to \boldsymbol{\psi}$ として (更に i を掛けて) $\overline{\boldsymbol{\psi}_a^C}i\gamma^5\boldsymbol{\psi}_b^C = \overline{\boldsymbol{\psi}_b}i\gamma^5\boldsymbol{\psi}_a$. そこで、$A_{a,b}^C = A_{b,a}$ である。

同様に、$\mathcal{O} = \gamma^\mu$ の時は $\mu = 0, 2$ で $phase = -1, {}^t\gamma^\mu = \gamma^\mu$、$\mu = 1, 3$ で $phase = 1, {}^t\gamma^\mu = -\gamma^\mu$ より

$$\overline{\psi_a^C}\gamma^\mu\psi_b^C = \overline{\psi_b}\gamma^\mu\psi_a \tag{4.4.8}$$

そこで再び $\psi \to \boldsymbol{\psi}$ として $\overline{\boldsymbol{\psi}_a^C}\gamma^\mu\boldsymbol{\psi}_b^C = \overline{\boldsymbol{\psi}_b}\gamma^\mu\boldsymbol{\psi}_a$. そこで、$V_{a,b}^C = -V_{b,a}$ である。

$\mathcal{O} = \gamma^\mu\gamma^5$ の時は、γ^μ の時に比べて $\mathcal{O}^\dagger$ の符号が変わるだけだから

$$\overline{\psi_a^C}\gamma^\mu\gamma^5\psi_b^C = -\overline{\psi_b}\gamma^\mu\gamma^5\psi_a \tag{4.4.9}$$

そこで再び $\psi \to \boldsymbol{\psi}$ として $\overline{\boldsymbol{\psi}_a^C}\gamma^\mu\gamma^5\boldsymbol{\psi}_b^C = \overline{\boldsymbol{\psi}_b}\gamma^\mu\gamma^5\boldsymbol{\psi}_a$. そこで、$AV_{a,b}^C = AV_{b,a}$ である。

次に、$\mathcal{O} = \sigma^{\mu\nu} = (\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)/2$ の時は $\mathcal{O} = \gamma^\mu\gamma^\nu$ $(\mu \neq \nu)$ として良いから、γ の時の操作を二回繰り返すと pase=1, transpose で $-$ 符号が付く効果に帰着する。そこで、V の時と同じで

$$\overline{\psi_a^C}\sigma^{\mu\nu}\psi_b^C = \overline{\psi_b}\sigma^{\mu\nu}\psi_a \tag{4.4.10}$$

そこで再び $\psi \to \boldsymbol{\psi}$ として $\overline{\boldsymbol{\psi}_a^C}\sigma^{\mu\nu}\boldsymbol{\psi}_b^C = -\overline{\boldsymbol{\psi}_b}\sigma^{\mu\nu}\boldsymbol{\psi}_a$ つまり $T_{a,b}^C = -T_{b,a}$ となる。

以上、まとめると $C : S_{a,b} \to S_{b,a}, A_{a,b} \to A_{b,a}, V_{a,b} \to -V_{b,a}, A_{a,b} \to A_{b,a}, T_{a,b} \to -T_{b,a}$ となる。

[T 変換]

T 変換に対しては演算子の順序が変わる。つまり $(\overline{\psi_a}\psi_b)^T = \psi_b^T \overline{\psi_a^T}$ である。これは $\boldsymbol{\psi}$ についても同様である。$T : \overline{\boldsymbol{\psi}_a}\boldsymbol{\psi}_b \to \boldsymbol{\psi}_b^T \overline{\boldsymbol{\psi}_a^T}$ また、行と列がひっくり返るので $(\overline{\psi_a}\psi_b)^T = {}^t(\psi_b^T)^t(\overline{\psi_a^T})$ としておく必要がある。一般に、$(ABC\cdots)^T = {}^t\ldots(C^T)^t(B^T)^t(A^T)$ である。また、C 変換の時と同様に $U_T = i\gamma^3\gamma^1\gamma^0 = (U_T)^\dagger, {}^t(U_T) = -U_T, (U_T)^\dagger U_T = U_T{}^t(U_F) = (U_T)^2 = 1$ が成り立つ。そこで

$$\begin{aligned}\psi^T &= U_T{}^t\overline{\psi(-t)} = i\gamma^3\gamma^1\psi(t)^* \\ \overline{\psi^T} &= (\psi^T)^\dagger\gamma^0 = {}^t\psi(-t)\gamma^0(U_T)^\dagger\gamma^0 = {}^t\psi(-t)(U_T)^\dagger\end{aligned} \tag{4.4.11}$$

より

$$\begin{aligned}(\overline{\psi_a}\psi_b)^T &= {}^t(\psi_b^T)^t(\overline{\psi_a^T}) = \overline{\psi(-t)_b}(U_T)^t(U_T)^*\psi(-t)_a \\ &= \overline{\psi(-t)_b}\psi(-t)_a\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

が得られる。今度は transpose をとる必要がないので、はじめから $\psi \to \boldsymbol{\psi}$ として $T : S_{a,b} \to S(-t)_{b,a}$ が得られる。

一般の場合にも

$$\mathcal{O}U_T = (phase)U_T\mathcal{O} \tag{4.4.13}$$

$(U_T = i\gamma^3\gamma^1\gamma^0)$ の phase を求めておけば、これと ${}^t\mathcal{O}$ を用いて

$$\begin{aligned}(\overline{\psi_a}\mathcal{O}\psi_b)^T &= {}^t(\psi_b^T)^t\mathcal{O}^t(\overline{\psi_a^T}) = \overline{\psi(-t)_b}(U_T)^{tt}\mathcal{O}(U_T)^*\psi(-t)_a \\ &= (phase)\overline{\psi(-t)_b}{}^t\mathcal{O}\psi(-t)_a\end{aligned} \tag{4.4.14}$$

が求まる。$\mathcal{O} = \gamma^5$ の場合は $(phase) = -1, {}^t\gamma^5 = \gamma^5$ から

$$(\overline{\psi_a}\gamma^5\psi_b)^T = -\overline{\psi(-t)_b}\gamma^5\psi(-t)_a \tag{4.4.15}$$

そこで再び $\psi \to \boldsymbol{\psi}$ として (更に i を掛けて) $T : A_{a,b} \to -A(-t)_{b,a}$ が得られる。

次に、$\mathcal{O} = \gamma^\mu$ の時は $\mu = 2$ の時のみ $(phase = -1)$ それ以外は 1、また transpose は $\mu = 0, 2$ で 1 $\mu = 1, 3$ で -1 より

$$(\overline{\psi_a}\gamma^\mu\psi_b)^T = \pm\overline{\psi(-t)_b}\gamma^\mu\psi(-t)_a \quad \text{for} \quad \mu = 0, i \tag{4.4.16}$$

ここに符号は $\mu = 0$ の時プラス、$\mu = i$ の時マイナスである。そこで、$T : (V^0, \boldsymbol{V})_{a,b} \to (V(-t)^0, -\boldsymbol{V}(-t))_{b,a}$ が得られる。

AV の場合は、$\mathcal{O} = \gamma^\mu\gamma^5$ として γ^μ の場合と比較して phase は extra -1、また transpose も $(\gamma^5)^t(\gamma^\mu)^t \to -(\gamma^\mu)^t\gamma^5$ として extra -1 が付き、全体の符号は変わらないから結局 V の場合と同じである。つまり、$T:(A^0,\boldsymbol{A})_{a,b} = (A^0(-t), -\boldsymbol{A}(-t))_{b,a}$ である。

最後に、テンソル $\mathcal{O} = \sigma^{\mu\nu} = (\boldsymbol{p},\boldsymbol{a})$ の場合は

$$
\begin{aligned}
&\sigma^{0i} = \gamma^0\gamma^i = p^i \\
&\sigma^{ij} = \gamma^i\gamma^j = e_{i,j,k}a^k \quad \text{for} \quad i \neq j
\end{aligned}
\tag{4.4.17}
$$

の二つの場合に分けて考える。まず $(\mu\nu) = (0i)$ に対しては、$(phase) = -1$ for $i = 2$, 1 otherwise. ${}^t(\gamma 0\gamma^i) = -\gamma^0\gamma^i$ for $i = 2$, ${}^t(\gamma^0\gamma^i) = \gamma^0\gamma^i$ otherwise より、いずれの場合にも符号は変わらない。そこで

$$
(\overline{\psi_a}\sigma^{0i}\psi_b)^T = \overline{\psi(-t)_b}\sigma^{0i}\psi(-t)_a \tag{4.4.18}
$$

つまり、$T:\boldsymbol{p}_{a,b} \to \boldsymbol{p}(-t)_{b,a}$ である。一方、$(\mu\nu) = (ij)$ の時は i か j のうちどちらか 2 の時は $(phase) = -1$, transpose=1、どちらも 2 でない時は $(phase) = 1$, transpose=-1 である。そこでいずれも符号が変わって

$$
(\overline{\psi_a}\sigma^{ij}\psi_b)^T = -\overline{\psi(-t)_b}\sigma^{ij}\psi(-t)_a \tag{4.4.19}
$$

つまり、$T:\boldsymbol{a}_{a,b} \to -\underline{(}-t)_{b,a}$ である。結局 $T:(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a})_{a,b} \to (\boldsymbol{p}(-t), -\boldsymbol{a}(-t))_{b,a}$ が得られる。以上、まとめると
$T: S_{a,b} \to S(-t)_{b,a}, A_{a,b} \to -A(-t)_{b,a}, (V^0,\boldsymbol{V})_{a,b} \to (V^0(-t), -\boldsymbol{V}(-t))_{b,a}$,
$(A^0,\boldsymbol{A})_{a,b} \to (A^0(-t), -\boldsymbol{A}(-t))_{b,a}, (\boldsymbol{p},\boldsymbol{a})_{a,b} \to (\boldsymbol{p}(-t), -\boldsymbol{a}(-t))_{b,a}$ となる。

[P 変換]

$$
\begin{aligned}
&\psi^P = i\gamma^0\psi(-\boldsymbol{x}) \\
&\overline{\psi^P} = (i\gamma^0\psi(-\boldsymbol{x}))^\dagger\gamma^0 = -i\psi(-\boldsymbol{x})^\dagger
\end{aligned}
\tag{4.4.20}
$$

より

$$
\overline{\psi_a^P}\psi_b^P = -i\psi(-\boldsymbol{x})_a^\dagger i\gamma^0\psi(-\boldsymbol{x})_b = \overline{\psi(-\boldsymbol{x})_a}\psi(-\boldsymbol{x})_b \tag{4.4.21}
$$

ψ は $\boldsymbol{\psi}$ でも同じである。そこで $S_{a,b}^P = S(-\boldsymbol{x})_{a,b}$ である。同様に、$A_{a,b}^P = -A(-\boldsymbol{x})_{a,b}$ である。

一般に、$\mathcal{O}$ に対して $\mathcal{O}\gamma^0 = (phase)\gamma^0\mathcal{O}$ の phase を求めておけば

$$\overline{\psi_a^P}\mathcal{O}\psi_b^P = (phase)\overline{\psi(-\boldsymbol{x})_a}\psi(-\boldsymbol{x})_b \tag{4.4.22}$$

により変換則が求まる。まず、$\mathcal{O} = \gamma^\mu$ の時 phase は $\mu = 0$ の時 1 それ以外の時 -1 より $P : (V^0, \boldsymbol{V})_{a,b} \to (V^0(-\boldsymbol{x}), -\boldsymbol{V}(-\boldsymbol{x}))_{a,b}$ である。$\mathcal{O} = \gamma^\mu\gamma^5$ に対しては、V の時より更に符号が変わるから $P : (A^0, \boldsymbol{A})_{a,b} \to (-A^0(-\boldsymbol{x}), \boldsymbol{A}(-\boldsymbol{x}))_{a,b}$ である。テンソルの場合には、$(\mu\nu) = (0, i)$ の場合は $(phase) = -1$, (ij) の場合は 1 より $P : (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})_{a,b} \to (-\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{x}), \boldsymbol{a}(-\boldsymbol{x}))_{a,b}$ である。

結局、まとめると $P : S_{a,b} \to S(-\boldsymbol{x})_{a,b}, A_{a,b} \to -A(-\boldsymbol{x})_{a,b}$, $(V^0, \boldsymbol{V})_{a,b} \to (V^0(-\boldsymbol{x}), -\boldsymbol{V}(-\boldsymbol{x}))_{a,b}, (A^0, \boldsymbol{A})_{a,b} \to (-A^0(-\boldsymbol{x}), \boldsymbol{A}(-\boldsymbol{x}))_{a,b}, (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})_{a,b} \to (-\boldsymbol{p}(-\boldsymbol{x}), \boldsymbol{a}(-\boldsymbol{x}))_{a,b}$ となる。

[CPT 変換]

以上の結果をまとめると、$x = (t, \boldsymbol{x})$ のうち符号の変わるものだけを明記して

$$\begin{array}{llll}
T: & S_{a,b} & \to & S(-t)_{b,a} \\
PT: & & \to & S(-t, -\boldsymbol{x})_{b,a} \\
CPT: & & \to & S(-t, -\boldsymbol{x})_{a,b} \\
T: & A_{a,b} & \to & -A(-t)_{b,a} \\
PT: & & \to & A(-t, -\boldsymbol{x})_{b,a} \\
CPT: & & \to & A(-t, -\boldsymbol{x})_{a,b} \\
T: & (V^0, \boldsymbol{V})_{a,b} & \to & (V^0(-t), -\boldsymbol{V}(-t))_{b,a} \\
PT: & & \to & (V^0(-t, -\boldsymbol{x}), \boldsymbol{V}(-t, -\boldsymbol{x}))_{b,a} \\
CPT: & & \to & -(V^0(-t, -\boldsymbol{x}), \boldsymbol{V}(-t, -\boldsymbol{x}))_{a,b} \\
T: & (A^0, \boldsymbol{A})_{a,b} & \to & (A^0(-t), -\boldsymbol{A}(-t))_{b,a} \\
PT: & & \to & -(A^0(-t, -\boldsymbol{x}), \boldsymbol{A}(-t, -\boldsymbol{x}))_{b,a} \\
CPT: & & \to & -(A^0(-t, -\boldsymbol{x}), \boldsymbol{A}(-t, -\boldsymbol{x}))_{a,b} \\
T: & (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})_{a,b} & \to & (\boldsymbol{p}(-t), -\boldsymbol{a}(-t))_{b,a} \\
PT: & & \to & -(\boldsymbol{p}(-t, -\boldsymbol{x}), \boldsymbol{a}(-t, -\boldsymbol{x}))_{b,a} \\
CPT: & & \to & (\boldsymbol{p}(-t, -\boldsymbol{x}), \boldsymbol{a}(-t, -\boldsymbol{x}))_{a,b}
\end{array} \tag{4.4.23}$$

つまり CPT 変換は 4-元ベクトルの 4-反転 $x \to -x, V \to -V, AV \to -AV$ に対応する。

4.5 散乱行列

粒子の生成・消滅を含む相対論的散乱問題の特徴として、平面波は特別な意味を持っている。すなわち、このような過程では元の状態と最終状態だけが観測可能であり、その間

の関係はいわゆる散乱行列によって表される。始状態 $|i\rangle$ と終状態 $\langle f|$ では、粒子はお互いに相互作用することなく、個々の粒子が完全に自由状態であると考える。結局観測されるのは、これらの状態における粒子の種類と個数、並びにエネルギーや運動量等の観測量だけである。ここでは、散乱行列 (scattering matrix) S についてあとで必要になる公式を幾つかの典型的な場合について導くことにする。まず S を

$$|i\rangle = \sum_f |f\rangle \langle f|S|i\rangle \tag{4.5.1}$$

によって定義する。始状態と終状態の 4 運動量をそれぞれ P_i, P_f として、$S_{f,i} = \langle f|S|i\rangle$ は何も起こらない過程とこれらを保存する 4-次元の δ-関数を含む項からなっている。これを

$$S_{f,i} = \delta_{f,i} + i(2\pi)^4\delta(P_f - P_i)T_{f,i} \tag{4.5.2}$$

と書く。 $T_{f,i}$ は T-matrix (遷移行列) と呼ばれる。S-行列は確率の保存を意味するユニタリー性 (unitality) $SS^\dagger = S^\dagger S = 1$ を持っている。すなわち

$$\sum_f S_{f,i}{}^* S_{f,i'} = \delta_{i,i'} \quad , \quad \sum_i S_{f,i}{}^* S_{f',i} = \delta_{f,f'} \tag{4.5.3}$$

を持っている。(4.5.2) を (4.5.3 に代入して $i = i'$, $f = f'$ とすると

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} T_{i,i} &= \frac{1}{2}\sum_f (2\pi)^4\delta(P_f - P_i)|T_{f,i}|^2 \\ \operatorname{Im} T_{f,f} &= \frac{1}{2}\sum_i (2\pi)^4\delta(P_f - P_i)|T_{f,i}|^2 \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

が得られる。

(4.5.2) で、何も起こらない項 δ_{fi} を無視すると

$$|S_{f,i}|^2 = ((2\pi)^4\delta(P_f - P_i))^2|T_{f,i}|^2 \tag{4.5.5}$$

となる。ここで、δ-関数の二乗が現われるがこの項は

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{i(P_f - P_i)}d^4x = \delta_{P_f - P_i} \tag{4.5.6}$$

で $P_f = P_i$ を仮定し、 $(2\pi)^4\delta_{P_f - P_i} = \int d^4x = Vt$ と置いて処理できる。そこで、(4.5.5) は

$$|S_{f,i}|^2 = (2\pi)^4\delta(P_f - P_i)|T_{f,i}|^2 Vt \tag{4.5.7}$$

そこで、単位時間あたりの確率はこれを t で割って

$$w_{f,i} = (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i)|T_{f,i}|^2 V \tag{4.5.8}$$

である。T-行列は体積 V あたり (ここでは、$V = 1$ を仮定せず、これを explicit に書く) 粒子 1 個の割合で normalize されている平面波の波動函数 u 等で表わされる。そこで、$1/\sqrt{2\varepsilon V}$ の factor を括り出して

$$T_{f,i} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_1 V}\sqrt{2\varepsilon_2 V}\cdots\sqrt{2\varepsilon'_1 V}\sqrt{2{\varepsilon'}_2 V}\cdots} M_{f,i} \tag{4.5.9}$$

としておくと便利である。 ここに、初めの粒子の 4-運動量を $p_1, p_2, \cdots$ で、終状態のそれらを $p'_1, p'_2, \cdots$ で表わすことにする。

初めに 1 粒子、あるいは 2 粒子ある場合が応用上特に重要である。1 番目の場合を崩壊といい、2 番目の場合を散乱と言う。それぞれの場合について、あとで有用になる公式を導く。まず、崩壊の場合を考え始めの 4-運動量を $p\ (= P_i)$ とする。 単位時間の確率 (4.5.8) には、実は終状態の状態数 $\prod_i (V d^3 p'_i/(2\pi)^3)$ が掛かる。そこで、上の normalization factor $1/(2{\varepsilon'}_i V)$ を繰り込んでおくとこれは $\prod_i (d^3 p'_i/(2{\varepsilon'}_i (2\pi)^3)$ となる。そこで、単位時間あたりの崩壊確率は

$$w_{f,i} = (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i)|M_{f,i}|^2 \frac{1}{2\varepsilon} \prod_i \frac{d^3 p'_i}{2{\varepsilon'}_i (2\pi)^3} \tag{4.5.10}$$

となる。終状態に 2 粒子しかない最も簡単な場合についてこれを書くと

$$dw_{f,i} = \frac{1}{32(\pi)^2}|M_{f,i}|^2 \frac{1}{\varepsilon {\varepsilon'}_1 {\varepsilon'}_2} \delta(\varepsilon - {\varepsilon'}_1 - {\varepsilon'}_2)\delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'_1 - \boldsymbol{p}'_2) d\boldsymbol{p}'_1 d\boldsymbol{p}'_2 \tag{4.5.11}$$

となる。運動量の 3-次元デルタ関数は $d\boldsymbol{p}'_2$ の積分で落ちる。重心系の場合には、この式は更に簡単になる。崩壊過程での重心系とは、始めの粒子が静止している様な座標系である。この場合、$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2 = 0$ であるので $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p}'_1 = -\boldsymbol{p}'_2$ とおくと、$|\boldsymbol{p}'|^2 = {{\varepsilon'}_1}^2 - {m_1}^2 = {{\varepsilon'}_2}^2 - {m_2}^2$ より ${\varepsilon'}_1 d{\varepsilon'}_1 = {\varepsilon'}_2 d{\varepsilon'}_2 = |\boldsymbol{p}'|d|\boldsymbol{p}'|$ であることから

$$\frac{{\varepsilon'}_1 {\varepsilon'}_2 d({\varepsilon'}_1 + {\varepsilon'}_2)}{{\varepsilon'}_1 + {\varepsilon'}_2} = {\varepsilon'}_1 d{\varepsilon'}_1 = |\boldsymbol{p}'_1|d|\boldsymbol{p}'_1| = |\boldsymbol{p}'|d|\boldsymbol{p}'| \tag{4.5.12}$$

が成り立つ。そこで

$$d\boldsymbol{p}'_1 = d\boldsymbol{p}' = |\boldsymbol{p}'|^2 d|\boldsymbol{p}'|do' = \frac{{\varepsilon'}_1 {\varepsilon'}_2 d({\varepsilon'}_1 + {\varepsilon'}_2)}{{\varepsilon'}_1 + {\varepsilon'}_2}|\boldsymbol{p}'|do' \tag{4.5.13}$$

より

$$dw_{f,i} = \frac{1}{32(\pi)^2 m^2}|M_{f,i}|^2 |\boldsymbol{p}'|do' \tag{4.5.14}$$

が得られる。ここに、o' は重心系における 1 番目の粒子の散乱の立体角である。

次に、2 粒子の散乱問題を考える。この場合 (4.5.10) の単位時間あたりの遷移確率を入射粒子の流れの密度 j で割って散乱断面積 σ_{fi} (scatterig cross section) のかたちで求めておくと便利である。流れの密度は「特殊相対論」の「相対論的 Kinematics」のところで学んだ様に

$$j = \frac{I}{V\varepsilon_1\varepsilon_2} \quad \text{with} \quad I = \sqrt{(p_1p_2)^2 - (m_1m_2)^2} \tag{4.5.15}$$

で定義される。ここに I は相対論的不変量で、s-channel の不変量 $s = (p_1 + p_2)^2$ を用いて $I = (1/2)\sqrt{(s-(m_1+m_2)^2)(s-(m_1-m_2)^2)}$ とも書ける。$(p_1p_2) = (\varepsilon_1\varepsilon_2 - \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2)$ を使って、具体的に I を計算すると

$$\begin{aligned} I &= (m_1^2\boldsymbol{p}_2^2 + m_2^2\boldsymbol{p}_1^2 + \boldsymbol{p}_1^2\boldsymbol{p}_2^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2 + (\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2)^2 \\ &= (\varepsilon_1\varepsilon_2)\sqrt{(1-\boldsymbol{v}_1^2)\boldsymbol{v}_2^2 + (1-\boldsymbol{v}_2^2)\boldsymbol{v}_1^2 + \boldsymbol{v}_1^2\boldsymbol{v}_2^2 - 2\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 + (\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2)^2} \\ &= (\varepsilon_1\varepsilon_2)\sqrt{(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)^2 - [\boldsymbol{v}_1^2\boldsymbol{v}_2^2 - (\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2)^2]} \\ &= (\varepsilon_1\varepsilon_2)\sqrt{(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)^2 - [\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2]^2} \\ &= (\varepsilon_1\varepsilon_2)(1-v_1v_2)v_{\mathrm{rel}} \end{aligned} \tag{4.5.16}$$

が得られる。ここに v_{rel} は相対論的相対速度の絶対値で、それは (普通の単位系で)

$$(v_{\mathrm{rel}})^2 = \frac{(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)^2 - \frac{1}{c^2}[\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2]^2}{\left(1-\frac{1}{c^2}v_1v_2\right)^2} \tag{4.5.17}$$

で与えられる。(「相対論的 Kinematics」の項、参照) 特に、$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が平行 $(\boldsymbol{v}_1//\boldsymbol{v}_2)$ の時は $j = \frac{|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|}{V}$ である。2 体散乱問題では、実験室系 (lab 系) は標的粒子が座標原点に静止した座標系、重心系 (cm 系) は全運動がゼロになる様な座標系と定義するのが普通である。そこで、lab 系では $\boldsymbol{v}_2 = 0$ より $j = \frac{v_1}{V}$、cm 系では $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{P} = 0$ で $\boldsymbol{v}_1//\boldsymbol{v}_2$ (逆符号) より $j = \frac{|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|}{V} = \frac{v_1+v_2}{V}$. いずれにしても、非相対論の時の普通の定義 $j = \frac{|\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2|}{V}$ が成り立っている。特に cm 系では、$I = \varepsilon_1\varepsilon_2|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}2| = |\varepsilon_1\boldsymbol{p}_1 + \varepsilon_2\boldsymbol{p}_1| = |\boldsymbol{p}|(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ である。

結局、(微分) 散乱断面積は

$$d\sigma_{fi} = \frac{dw_{f,i}}{j} = (2\pi)^4\delta(P_f - P_i)|M_{f,i}|^2\frac{1}{4I}\prod_i \frac{d^3p'_i}{2\varepsilon'_i(2\pi)^3} \tag{4.5.18}$$

となる。特に、終状態に 2 粒子がある場合が重要である。この時

$$d\sigma_{fi} = \frac{1}{16(2\pi)^2}|M_{f,i}|^2\frac{1}{I\varepsilon'_1\varepsilon'_2}\delta(\varepsilon'_1+\varepsilon'_2-\mathcal{E})\delta^3(\boldsymbol{p}'_1+\boldsymbol{p}'_2-\boldsymbol{P})d\boldsymbol{p}'_1d\boldsymbol{p}'_2 \tag{4.5.19}$$

である。ここに、$\mathcal{E}=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ は始状態の全エネルギーと全運動量である。再び、二番目の粒子の運動量積分から運動量保存のデルタ関数は消える。特に、重心系では $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{p}_1'+\boldsymbol{p}_2'=0$ より $\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}_1'=-\boldsymbol{p}_2'$ として崩壊の時と同様にエネルギー積分を処理すると

$$d\sigma_{fi}=\frac{1}{64\pi^2\mathcal{E}^2}|M_{f,i}|^2\frac{|\boldsymbol{p}'|}{|\boldsymbol{p}|}do' \tag{4.5.20}$$

となる。更に弾性散乱の時は、散乱後の粒子の種類と系の運動量の大きさ、エネルギーは保存され $|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{p}'|$ かつ $\mathcal{E}=\mathcal{E}'$ である。(4.5.20) は do' の代わりに $d(-t)$ を使っても書ける。実際 cm 系で

$$t=(p_1-p_3)^2=m_1^2+m_3^2+2\varepsilon_3\varepsilon_4-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'|\cos\theta \tag{4.5.21}$$

より、軸対称性を仮定して $d(-t)=2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'|d\cos\theta=(|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}'|/\pi)do'$ から再び $I=|\boldsymbol{p}|\mathcal{E}$ を使って

$$d\sigma_{fi}=\frac{1}{(8\sqrt{\pi}I)^2}|M_{f,i}|^2d(-t) \tag{4.5.22}$$

が得られる。

[散乱振幅の部分波展開]

以下、二体散乱 a+b → c+d (1+2 → 3+4) の散乱振幅 $S_{f,i}$ の重心系における部分波展開について述べる。既に相対論的 kinematiccs のところので見た様に、質量 m_1, m_2 が得られていると $\varepsilon_1,\varepsilon_2,|\boldsymbol{p}_1|,|\boldsymbol{p}_2|,|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2|$ は全て重心系の全エネルギー $\mathcal{E}=\varepsilon_1+\varepsilon_2$ だけで一意的に決まる。質量 m_i (i = 1 - 4) が与えられているとすると、保存する重心系の全エネルギー $\mathcal{E}=\mathcal{E}'$ によりそれぞれの粒子のエネルギー ε_i ($i=1,\cdots,4$), 運動量 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_1=-\boldsymbol{p}_2$ と $\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}_3=-\boldsymbol{p}_4$ の大きさ $|\boldsymbol{p}|,|\boldsymbol{p}'|$ は完全に決定する。また、$\mathcal{E}$ は入射粒子のエネルギー $E_{\rm lab}$ から $\mathcal{E}=\sqrt{{m_1}^2+{m_2}^2+2m_2E_{\rm lab}}$ により決まる。 全角運動量とその射影値 JM は空間の等方性に基づく保存量である。そこで、ある特定の全角運動量 J を持った散乱振幅は

$$\langle\mathcal{E},\varepsilon_3,\varepsilon_4,\boldsymbol{p}',JM|\,S\,|\mathcal{E},\varepsilon_1,\varepsilon_2,\boldsymbol{p},JM\rangle=\langle\boldsymbol{n}'|\,S^J(\mathcal{E})\,|\boldsymbol{n}\rangle \tag{4.5.23}$$

と表わされる。ここに、$\boldsymbol{n}=\hat{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{n}'=\hat{\boldsymbol{p}'}$ は運動量の方位ベクトル、また散乱振幅 $S^J(\mathcal{E})$ は一般には角運動量成分 M には依存しない。(4.5.23) は、まだスピン量子数については行列である。軌道角運動量 $\boldsymbol{L}$ やスピン角運動量は個別には保存せず、その取り扱いには注意を要する。一番便利なのは、粒子の進行方向へのスピンの射影値である helicity である。

例えば、一粒子の場合粒子の進行方向を $\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{p}}$ とすると $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}, \hbar\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}]$ より、$\boldsymbol{nL} = 0$ だから $\boldsymbol{Jn} = \boldsymbol{Sn}$ である。二粒子系の場合、それぞれの粒子の進行方向へのスピン射影を λ_1, λ_2 として始状態・終状態のスピン射影の組みを $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2), \lambda' = (\lambda_3, \lambda_4)$ とする。重心系ではスピン射影の値は $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ である。同様に $\Lambda' = \lambda_3 - \lambda_4$ とすると、これらはいずれも $\boldsymbol{J}$ のスピン射影だから $\Lambda, \Lambda' = -J, -(J-1), \cdots, (J-1), J$ のいずれかである。そこで、以下エネルギーのある決まった値を全て省略して (4.5.23) を

$$\langle \boldsymbol{n}', \lambda' | M^J | \boldsymbol{n}, \lambda \rangle \tag{4.5.24}$$

と書く事にする。$\langle \boldsymbol{n}, \lambda |$ と $\langle JM\lambda |$ は、一つの状態の運動量表示と角運動量表示の違いであり互いにユニタリー変換の関係にある。つまり

$$|JM\lambda\rangle = \int d\boldsymbol{n} \, |\boldsymbol{n}, \lambda\rangle \langle \boldsymbol{n}, \lambda | JM\lambda \rangle \tag{4.5.25}$$

ここに

$$\langle \boldsymbol{n}, \lambda | JM\lambda \rangle = \langle JM\lambda | \boldsymbol{n}, \lambda \rangle^* \tag{4.5.26}$$

また逆変換は

$$|\boldsymbol{n}, \lambda\rangle = \sum_{JM} |JM\lambda\rangle \langle JM\lambda | \boldsymbol{n}, \lambda \rangle \tag{4.5.27}$$

である。これを使うと全散乱振幅は (4.5.24) を重ね合わせて

$$\begin{aligned} S_{f,i} &= \sum_{JM} \left\langle \boldsymbol{n}', \lambda' \middle| S^J \middle| \boldsymbol{n}, \lambda \right\rangle \\ &= \sum_{JM} \langle \boldsymbol{n}', \lambda' | JM\lambda' \rangle \langle JM\lambda' | S | JM\lambda \rangle \langle JM\lambda | \boldsymbol{n}, \lambda \rangle \\ &= \sum_{JM} \langle \boldsymbol{n}', \lambda' | JM\lambda' \rangle \left\langle \lambda' \middle| S^J \middle| \lambda \right\rangle \langle JM\lambda | \boldsymbol{n}, \lambda \rangle \end{aligned} \tag{4.5.28}$$

と展開される。

展開係数 (4.5.26) を導くために、まず 1 粒子系のスピノール関数 $u^{(\lambda)}$ を考える。全角運動量演算子を $\boldsymbol{j}$ として、$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{s}$ また $(\boldsymbol{jn})u^{(\lambda)} = \lambda u^{(\lambda)}$ とする。既に Dirac スピノールのところで学んだ様に、その様な固有関数は空間回転の表現行列である $\mathcal{D}$-函数で表わされる。まず、量子数 $\boldsymbol{n}$ と動変数を区別してそれを $\boldsymbol{\nu}$ と書く。

$$\psi_{\boldsymbol{n},\lambda}(\boldsymbol{\nu}) = \langle \boldsymbol{\nu} | \boldsymbol{n}, \lambda \rangle = u^{(\lambda)} \delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{n}) \tag{4.5.29}$$

また、2 粒子系についても $u^{(\lambda_1)}u^{(\lambda_2)}$ を $u^{(\lambda)}$、$u^{(\lambda_3)}u^{(\lambda_4)}$ を $u^{(\lambda')}$ と書いて同じ式が成り立つ。Euler 角を $\Omega=(\varphi,\theta,\psi)$ として極座標の角度部分を $\boldsymbol{n},\boldsymbol{\nu}=(\theta,\varphi)$ 等とする。$\psi=0$ と置いて $\Omega(\varphi,\theta,0)=\boldsymbol{\nu}(\theta,\varphi)$ と対応させる。helicity 状態 $|jm\lambda\rangle$ の波動函数は

$$\psi^{(\lambda)}_{jm}(\boldsymbol{\nu})=\langle\boldsymbol{\nu}|jm\lambda\rangle=u^{(\lambda)}\mathcal{D}^{j}_{m,\lambda}(\boldsymbol{\nu})^{*}\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \tag{4.5.30}$$

である。特にスピン 0 の時、$\lambda=0$ で $u^{(\lambda)}\to 1$、かつ $j\to\ell$ として

$$\psi^{(0)}_{\ell m}(\boldsymbol{\nu})=\langle\boldsymbol{\nu}|\ell m0\rangle=\mathcal{D}^{\ell}_{m,0}(\boldsymbol{\nu})^{*}\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}=Y_{\ell m}(\boldsymbol{\nu}) \tag{4.5.31}$$

と普通の軌道角運動量函数に戻る。まず (4.5.25) の左から $\langle\boldsymbol{\nu}|$ を掛けて (4.5.29) を使うと

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{\nu}|JM\lambda\rangle&=\int d\boldsymbol{n}\,\langle\boldsymbol{\nu}|\boldsymbol{n},\lambda\rangle\,\langle\boldsymbol{n},\lambda|JM\lambda\rangle\\&=\int d\boldsymbol{n}u^{(\lambda)}\delta^{(2)}(\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{n})\,\langle\boldsymbol{n},\lambda|JM\lambda\rangle\\&=u^{(\lambda)}\,\langle\boldsymbol{\nu},\lambda|JM\lambda\rangle\end{aligned} \tag{4.5.32}$$

が得られる。これを (4.5.30) と比較すると

$$\langle\boldsymbol{\nu},\lambda|JM\lambda\rangle=\mathcal{D}^{J}_{M,\lambda}(\boldsymbol{\nu})^{*}\sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \tag{4.5.33}$$

あるいは $\boldsymbol{\nu}\to\boldsymbol{n}$ へ戻して

$$\langle\boldsymbol{n},\lambda|JM\lambda\rangle=\mathcal{D}^{J}_{M,\lambda}(\boldsymbol{n})^{*}\sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \tag{4.5.34}$$

が得られる。2 粒子系に対して、$\lambda\to\Lambda=\lambda_1-\lambda_2$ 等としてこれを使うと (4.5.28) は

$$S_{f,i}=\sum_{JM}\left\langle\boldsymbol{n}',\lambda'\middle|S^J|\boldsymbol{n},\lambda\right\rangle=\sum_{JM}\frac{2J+1}{4\pi}\mathcal{D}^{J}_{M,\Lambda'}(\boldsymbol{n}')\left\langle\lambda'\middle|S^J|\lambda\right\rangle\mathcal{D}^{J}_{M,\Lambda}(\boldsymbol{n})^{*} \tag{4.5.35}$$

となる。これに倣って 2 粒子系の散乱振幅を

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{n}',\lambda'|f|\boldsymbol{n},\lambda\rangle&=(4\pi)\sum_{JM}\left\langle\boldsymbol{n}',\lambda'\middle|f^J|\boldsymbol{n},\lambda\right\rangle\\&=\sum_{JM}(2J+1)\mathcal{D}^{J}_{M,\Lambda'}(\boldsymbol{n}')\left\langle\lambda'\middle|f^J|\lambda\right\rangle\mathcal{D}^{J}_{M,\Lambda}(\boldsymbol{n})^{*}\end{aligned} \tag{4.5.36}$$

で定義しておくと便利である。ここで特に、入射粒子の方向を z-軸にとって $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_z$ として $\theta = 0, \varphi = 0$ とすると $\mathcal{D}^J_{M,\Lambda}(0,0,0) = \delta_{M,\Lambda}$ より

$$\langle \boldsymbol{n}', \lambda' | f | \boldsymbol{n}, \lambda \rangle = \sum_J (2J+1) \mathcal{D}^J_{\Lambda,\Lambda'}(\boldsymbol{n}') \left\langle \lambda' \middle| f^J | \lambda \right\rangle \tag{4.5.37}$$

となる。ここに $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2), \Lambda = \lambda_1 - \lambda_2,\ \lambda' = (\lambda_3, \lambda_4), \Lambda = \lambda_3 - \lambda_4$ である。$\boldsymbol{n}' = (\theta', \varphi')$ は散乱後の散乱角である。特に、スピン 0 の 2 粒子の弾性散乱に対しては $\Lambda = \Lambda' = 0$ で

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^J_{0,0}(\varphi', \theta', 0) &= d^J_{0,0}(\theta') \\
&= \sqrt{\frac{4\pi}{2J+1}} Y_{J0}(\theta', \varphi') = \sqrt{\frac{4\pi}{2J+1}} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} P_J(\cos\theta') \\
&= P_J(\cos\theta')
\end{aligned} \tag{4.5.38}$$

より、$J \to \ell, \theta' {\to} \theta$ と書いて

$$\langle \boldsymbol{n}' | f | \boldsymbol{n} \rangle = \sum_\ell (2\ell+1) f^\ell P_\ell(\cos\theta) \tag{4.5.39}$$

と通常の部分波展開と同じになる。(4.5.36) の normalization は

$$d\sigma_{f,i} = |\langle \boldsymbol{n}', \lambda' | f | \boldsymbol{n}, \lambda \rangle|^2 do' \tag{4.5.40}$$

に対応している。弾性散乱の時に、これを (4.5.20) の結果と比べると

$$\langle \boldsymbol{n}', \lambda' | f | \boldsymbol{n}, \lambda \rangle = \frac{1}{8\pi\mathcal{E}} M_{f,i} \tag{4.5.41}$$

である事が分かる。

(4.5.40) は、ある特定の f, i の helicity 状態 λ, λ' に対するものである。これらを測定しない場合や偏っていない場合には、始めの helicity 状態については平均を取り終状態の helicity については和をとる必要がある。すなわち

$$\langle \boldsymbol{n}', \lambda_c, \lambda_d | f | \boldsymbol{n}, \lambda_a, \lambda_b \rangle \langle \boldsymbol{n}', \lambda_{c'}, \lambda_{d'} | f | \boldsymbol{n}, \lambda_{a'}, \lambda_{b'} \rangle^* \tag{4.5.42}$$

に混合状態の密度行列

$$\left\langle \lambda_a \middle| \rho^{(s_a)} | \lambda_{a'} \right\rangle \left\langle \lambda_b \middle| \rho^{(s_b)} | \lambda_{b'} \right\rangle \left\langle \lambda_c \middle| \rho^{(s_c)} | \lambda_{c'} \right\rangle \left\langle \lambda_d \middle| \rho^{(s_d)} | \lambda_{d'} \right\rangle \tag{4.5.43}$$

を掛けて $a,a',\cdots,d,d'$ について和を取り、$\left\langle\lambda_a\middle|\rho^{(s_a)}|\lambda_{a'}\right\rangle=\delta_{a,a'}\frac{1}{2s_a+1}$ 等を使うと

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{f,i}}{do'}&=\frac{1}{(2s_a+1)(2s_b+1)}\sum_{(\lambda)}\langle\boldsymbol{n}',\lambda_c,\lambda_d|f|\boldsymbol{n},\lambda_a,\lambda_b\rangle\langle\boldsymbol{n}',\lambda_c,\lambda_d|f|\boldsymbol{n},\lambda_a,\lambda_b\rangle^*\\
&=\frac{1}{(2s_a+1)(2s_b+1)}\sum_{(\lambda)}\sum_{J,J'}(2J+1)(2J'+1)\left\langle\lambda'\middle|f^J|\lambda\right\rangle\left\langle\lambda'\middle|f^{J'}|\lambda\right\rangle^*\\
&\times\mathcal{D}^J_{\Lambda,\Lambda'}(\boldsymbol{n}')\mathcal{D}^{J'}_{\Lambda,\Lambda'}(\boldsymbol{n}')^*
\end{aligned}
\tag{4.5.44}
$$

ここに、(λ) の和は全ての λ についての和を表わす。ここで更に、$\mathcal{D}^{J'}_{\Lambda,\Lambda'}(\boldsymbol{n}')^*=(-)^{\Lambda-\Lambda}\mathcal{D}^{J'}_{-\Lambda,-\Lambda'}(\boldsymbol{n}')$ と D-函数の CG-series を使うと

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{D}^J_{\Lambda,\Lambda'}(\boldsymbol{n}')\mathcal{D}^{J'}_{\Lambda,\Lambda'}(\boldsymbol{n}')^*=\mathcal{D}^J_{\Lambda,\Lambda'}(\boldsymbol{n}')(-)^{\Lambda-\Lambda'}\mathcal{D}^{J'}_{-\Lambda,-\Lambda'}(\boldsymbol{n}')\\
&=(-)^{\Lambda-\Lambda'}\sum_L\langle J\Lambda J'-\Lambda|L0\rangle\langle J\Lambda' J'-\Lambda'|L0\rangle\mathcal{D}^L_{0,0}(\boldsymbol{n}')\\
&=(-)^{\Lambda-\Lambda'}\sum_L(2L+1)\begin{pmatrix}J & J' & L\\ \Lambda & -\Lambda & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J & J' & L\\ \Lambda' & -\Lambda' & 0\end{pmatrix}P_L(\cos\theta')
\end{aligned}
\tag{4.5.45}
$$

より結局

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{f,i}}{do'}&=\frac{1}{(2s_a+1)(2s_b+1)}\sum_{(\lambda)}\sum_{J,J'}(2J+1)(2J'+1)\left\langle\lambda'\middle|f^J|\lambda\right\rangle\left\langle\lambda'\middle|f^{J'}|\lambda\right\rangle^*\\
&\times(-)^{\Lambda-\Lambda'}\sum_L(2L+1)\begin{pmatrix}J & J' & L\\ \Lambda & -\Lambda & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J & J' & L\\ \Lambda' & -\Lambda' & 0\end{pmatrix}P_L(\cos\theta')
\end{aligned}
\tag{4.5.46}
$$

となる。ここに θ_1 は $\boldsymbol{n}'$ と入射 z-軸の間の角度である。

[光学定理]

2 体弾性散乱に S-matrix の unitarity を適用すると、非相対論的散乱問題で既に見た様にいわゆる「光学定理」を導くことが出来る。(4.5.4) の始めの式で、final state f の sum を 2 体弾性散乱に限って $T_{f,i}$ から $M_{f,i}$ の散乱振幅に移ると (4.5.12) に従って運動量、エネルギー積分を処理することにより

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im}M_{i,i}&=\frac{1}{2}\sum_f(2\pi)^4\delta(P_f-P_i)\frac{1}{2\varepsilon'_1V2\varepsilon'_2V}|M_{f,i}|^2\\
&=\frac{1}{32\pi^2}\sum_{\lambda'}\int do'\frac{|\boldsymbol{p}'|}{\mathcal{E}}|M_{f,i}|^2
\end{aligned}
\tag{4.5.47}
$$

が得られる。これを elastic unitarity という。ここで更に、(4.5.41) と $|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{p}'|$ を使うと

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,\langle \boldsymbol{n}, \lambda | f | \boldsymbol{n}, \lambda \rangle &= \frac{|\boldsymbol{p}|}{4\pi} \sum_{\lambda'} \int do' |\,\langle \boldsymbol{n}', \lambda' | f | \boldsymbol{n}, \lambda \rangle\,|^2 \\
&= \frac{|\boldsymbol{p}|}{4\pi} \sigma_t
\end{aligned} \tag{4.5.48}
$$

ここに $\sigma_t = \sum_{\lambda'} \int do' |\,\langle \boldsymbol{n}', \lambda' | f | \boldsymbol{n}, \lambda \rangle\,|^2$ は全弾性散乱断面積である。

[散乱振幅の対称性]

[不変振幅]

4.6 不変摂動論

ここでは、ファイマン (1948-49 年) およびダイソン (1949 年) によって発展させられた、相対論的共変性を備えたいわゆる「不変摂動論」について概説する。「散乱行列」の初めのところで述べたように、相対論的判断問題を第二量子化表示で考える時、波動関数は時間に依存しないとし時間依存性は演算子のほうに移して考えるのが普通である。第二量子化表示のハミルトニアン H は自由粒子の集まりのそれであつて実際には非摂動のハミルトニアン H_0 に対応する。そこで、これまでハイゼンベルグ表示の演算子 $V(t) = e^{iHt} V e^{-iHt}$ と言って来たものは実際には相互作用表示の演算子で $V(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}$ である。そこで、相互作用表示の運動方程式 $i\dot{\Psi}(t) = V(t)\Psi(t)$ が成り立つ。ここに、$\Psi(t)$ は相互作用表示の波動関数で $\Psi(t) = e^{iH_0 t} e^{-iHt} \Psi(0)$ である。((3.67) 参照) 非摂動波動函数の完全系を $|n\rangle$ ($H_0 |n\rangle = E_n |n\rangle$) として、$\Psi(t)$ を $\Psi(t) = \sum_n C_n(t) |n\rangle$ を運動方程式に代入して左から $\langle m|$ で内積をとると ($n \leftrightarrow m$ として)

$$
\begin{aligned}
i\frac{d}{dt} C_n(t) &= \sum_n V_{n,m}(t) C_m(t) \\
V_{n,m} &= V_{n,m} e^{i(E_n - E_m)t} \quad \text{with} \quad V_{n,m} = \langle n | V | m \rangle
\end{aligned} \tag{4.6.1}
$$

が得られる。第二量子化表示の始状態 $|i\rangle$, 終状態 $|f\rangle$ はそれぞれ $|i\rangle = \sum_n C_n(-\infty) |n\rangle = \Psi(-\infty)$, $|f\rangle = \sum_n C_n(\infty) |n\rangle = \Psi(\infty)$ である。そこで S-matrix S を $S_{f,i} = \langle f | S | i \rangle$ とすると、$\Psi(\infty) = S\Psi(-\infty)$ である。

まず、相互作用表示のシュレーディンガー方程式 $i\dot{\Psi}^I(t) = V^I(t)\Psi^I(t)$ から出発する。この方程式から $\Psi(t) = e^{-i\int_{t_0}^{t} V(t)dt}\Psi(t_0)$ がすぐ導かれる様に思えるが、この推論は実は正しくはない。それを見るために、指数関数内の積分変数を $t \to \xi$ に変えて

$$e^{-i\int_{t_0}^{t} V(\xi)d\xi} = \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n \frac{1}{n!}(\int_{t_0}^{t} V(\xi)d\xi)^n \tag{4.6.2}$$

とベキ級数に展開してみよう。積分の n-乗でこれを n-重積分に変えて、一辺 $[t_0, t]$ の n-次元立方体内の各点を $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ の n-次元ベクトルで表わすことにする。立方体を条件 $t_0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{n-1} < \xi_n < t$ により小さく切り分けると、立方体は $\xi_1, \xi_i, \cdots, \xi_n$ の各変数の順番を入れ替えた $n!$ 個の小片に切り分けられることが分かる。まず簡単ため、$n = 2$ の場合にこれを見てみると

$$\begin{aligned}\left(\int_{t_0}^{t} V(\xi)d\xi\right)^2 &= \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} V(\xi_2)V(\xi_1)d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int\int_{t>\xi_2>\xi_1>t_0} V(\xi_2)V(\xi_1)d\xi_1 d\xi_2 \ + \int\int_{t>\xi_1>\xi_2>t_0})V(\xi_2)V(\xi_1)d\xi_1 d\xi_2\end{aligned} \tag{4.6.3}$$

ここで、2 項目の積分変数 ξ_1 と ξ_2 をひっくり返すと積分領域は 1 項目と一致するが被積分関数が $V(\xi_2)V(\xi_1) \to V(\xi_1)V(\xi_2)$ となって積分自体は 1 項目と一致しない。それは、H_0 と V が交換しないためである。そこで、上の定式化を modify して時間引数が大きい方を常に左に置くことにすれば (4.6.3) の積分全体が 1 項目の 2 倍となる。その様な操作を time ordering operation (T-ordering) といって T で表わす。つまり

$$\mathrm{T}V(t_2)V(t_1) = \begin{cases} V(t_2)V(t_1) & \text{for} \quad t_2 > t_1 \\ V(t_1)V(t_2) & \text{for} \quad t_2 < t_1 \end{cases} \tag{4.6.4}$$

として

$$\mathrm{T}\left(\int_{t_0}^{t} V(t)dt\right)^2 = \int\int_{t>t_2>t_1>t_0} V(t_2)V(t_1)dt_1 dt_2 = \int_{t_1}^{t} dt_2 V(t_2)\int_{t_0}^{t_1} dt_1 V(t_1) \tag{4.6.5}$$

一般には

$$\mathrm{T}\left(\int_{t_0}^{t} V(t)dt\right)^n = n!\int_{t_{n-1}}^{t} dt_n V(t_n)\int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} dt_{n-1}V(t_{n_1})\cdots\int_{t_1}^{t_2} dt_2 V(t_2)\int_{t_0}^{t_1} dt_1 V(t_1) \tag{4.6.6}$$

が得られる。そこで、結局

$$\Psi(t) = \mathrm{T}e^{-i\int_{t_0}^{t} V(t)dt}\Psi(t_0) = \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n \frac{1}{n!}\mathrm{T}(\int_{t_0}^{t} V(t)dt)^n\Psi(t_0)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n \int_{t_{n-1}}^{t} dt_n V(t_n) \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} dt_{n-1} V(t_{n_1}) \cdots \int_{t_1}^{t_2} dt_2 V(t_2) \int_{t_0}^{t_1} dt_1 V(t_1)\Psi(t_0) \tag{4.6.7}$$

が得られる。ここから、t で微分すると 1 項ずつずれて $i\dot{\Psi}(t) = V(t)\Psi(t)$ ということが分かる。(4.6.6) を $\Psi^I(t) = S(t, t_0)\Psi^I(t_0)$ と書くと、$S(t, t_0) = \mathrm{T}e^{-i\int_{t_0}^{t} V(t)dt}$ である。この式は相互作用表示の波動函数 $\Psi(t)$ に対する式である。$t_0 \to -\infty, t \to \infty$ として

$$S(\infty, -\infty) = S_{fi} = \mathrm{T}e^{-i\int_{-\infty}^{\infty} V(t)dt}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n \int_{t_{n-1}}^{\infty} dt_n V(t_n) \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} dt_{n-1} V(t_{n_1}) \cdots \int_{t_1}^{t_2} dt_2 V(t_2) \int_{-\infty}^{t_1} dt_1 V(t_1) \tag{4.6.8}$$

が得られる。

4.7 ファイマンダイアグラム

5 量子電磁気学

5.1 Fermi-Breit 相互作用

6 繰り込み理論